

Das Synadron und die Parabelverschiebung im KQ- Koordinatensystem

**Geradon, CRT-Quotienten, g-Vektor und Kreuzrelationen zu den
Triatrad-Bändern**

Version 1:

Datum Veröffentlichung: 24.08.2026

Achim Meißner

Email: service@ameis-web.de

Abstract

Diese Arbeit untersucht Kreuzrelationen zwischen natürlichen Produktzerlegungen, der KQ-Struktur, komplementären CRT-Idempotenten und dem Triatrad. Ausgangspunkt ist die Parabelfamilie $N = q^2 - aq$, in der das Geradon $a = q - p$ den Faktorabstand beschreibt und der g -Vektor natürliche Produktpaare relativ zum reellen KQ-Referenzpaar parametrisiert. Aus komplementären CRT-Idempotenten werden ganzzahlige Quotienten Q_1, Q_2 abgeleitet, für die insbesondere die exakten Beziehungen $Q_1 Q_2 = C(C + 1)$ und $N = Q_1 + Q_2 + \sqrt{4Q_1 Q_2 + 1}$ gelten. Daraus folgt der Synadron-Dreiwertesatz

$$G(Q_1) + G(Q_2) = G(N) + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \{-1, 0, +1\}.$$

Die Verbindung mit dem Triatrad ermöglicht eine zusätzliche Lokalisierung des größeren Quotienten Q_+ . Für echte ungerade Semiprime außerhalb der Familien $q = 3p \pm 2$ wird gezeigt, dass Q_+ ausschließlich in den beiden oberen Triatrad-Bändern liegen kann; für diese beiden Familien bleibt der Grenzfall offen. Darüber hinaus zeigt sich, dass die grundlegende Synadron-Struktur und der Dreiwertesatz nicht auf Semiprime beschränkt sind.

Schlüsselwörter: KQ; Synadron; Parabelverschiebung; Geradon; g -Vektor; Produktzerlegung; CRT-Idempotenten; CRT-Quotienten; Triatrad; Triatrad-Bänder; Semiprime; arithmetische Kreuzrelationen

Inhalt

1	Einleitung.....	5
1.1	Gegenstand der Arbeit	5
1.2	Über Faktordarstellung zur geometrischen Produktkoordinate	6
1.3	Ziel der Kreuzbetrachtung	6
2	Die Parabelverschiebungstheorie.....	8
2.1	Elimination des kleineren Faktors.....	8
2.2	Die a -Familie	9
2.2.1	Der Ausgangsfall $a = 0$	9
2.2.2	Die erste Verschiebung $a = 1$	10
2.2.3	Weitere Verschiebungen $a \geq 2$	10
2.2.4	Der Randfall $a = q - 1$	11
2.3	Das Geradon.....	12
2.4	KQ als Referenzparabel der Familie	12
2.5	Der g -Vektor.....	13
2.6	Die ausgezeichnete Referenzposition $g = 1$	15
2.7	Kopplung von Geradon und g -Vektor.....	16
2.8	Rekonstruktion und Ganzzahligkeitsbedingung	18
2.9	Beispiel $N = 589$	20
2.10	Semiprime als Spezialfall	21
3	Komplementäre CRT-Idempotenten und abgeleitete Quotienten.....	23
3.1	Klassische Ausgangsstruktur	23
3.2	Die abgeleiteten CRT-Quotienten	23
3.3	Eine weitere ganzzahlige Größe	24
3.4	Produktschließung der CRT-Quotienten	25
3.5	Summenrelation der Quotienten	26
3.6	Eine exakte Quadratwurzelrelation.....	27
3.7	Der zweite Produktkörper und der g -Vektor gH	28
3.8	Rückführung von $Q +$ auf gH	30
3.9	Faktorinformation im gekürzten gH	31
3.10	Beispiel $N = 589$	32
4	Das Synadron.....	35
4.1	Begriffliche Festlegung.....	35

4.2	Die KQ-Gruppenabbildung	35
4.3	Kontinuierliche Kopplung.....	36
4.4	Herleitung der kontinuierlichen Schranke.....	36
4.5	Übergang zu den ganzzahligen KQ-Gruppen	38
4.6	Der Synadron-Dreiwertesatz	39
4.7	Ausschluss der Ausgangsgruppe	40
4.8	Beispiel $N = 589$	42
5	Triatrad und KQ-Bänder	43
5.1	Der Triatrad-Abstieg	43
5.2	Größenreduktion und KQ-Index	44
5.3	Definition der Triatrad-Bänder	45
5.4	Asymptotische Bandgeometrie.....	46
6	Kreuzrelation zwischen Synadron und Triatrad	48
6.1	Vergleich des größeren Quotienten mit dem zweiten Triatradwert.....	48
6.2	Der CRT-Abstandsparameter.....	49
6.3	Der Fall $k = 1$	50
6.4	Die Fälle $k \geq 5$	51
6.5	Der verbleibende Fall $k = 3$	52
6.6	Gegenwärtiger Kreuzsatz.....	55
6.7	Beispiel $N = 589$	56
7	Der gH -Vektor als Kreuzkoordinate.....	58
7.1	Verbindung zwischen Parabelverschiebung und Synadron	58
7.2	Normierte Lage des größeren Quotienten.....	58
7.3	Die asymptotische Grenze zwischen Band 0 und Band 1	60
7.4	Exakte und asymptotische Aussagen.....	61
7.5	Rückkehr zum Geradon	62
8	Kreuzrelationen im KQ-Koordinatensystem.....	64
8.1	KQ als gemeinsame Koordinatenebene.....	64
8.2	Die erste Kreuzrelation: Parabelverschiebung und KQ	64
8.3	Die zweite Kreuzrelation: Synadron und Parabelverschiebung.....	65
8.4	Die dritte Kreuzrelation: Synadron und Triatrad	65
8.5	Die vierte Kreuzrelation: gH und Triatrad-Bänder	67
9	Verallgemeinerung und Grenzen.....	68
9.1	Synadron-Struktur über den Semiprimfall hinaus.....	68

9.2	Keine Faktorisierungsaussage	69
9.3	Der offene $k = 3$ -Randfall	70
9.4	Weitere Forschungsfragen	71
10	Schlussbetrachtung	72

1 Einleitung

1.1 Gegenstand der Arbeit

Eine natürliche Zahl kann gleichzeitig in unterschiedlichen arithmetischen Strukturen auftreten. Eine Produktzerlegung beschreibt sie über zwei Faktoren, die KQ-Struktur¹ ordnet ihr eine kanonische Parabelkoordinate zu, das Triatrad² erzeugt aus ihr einen deterministischen rekursiven Abstiegsweg, und für geeignete zusammengesetzte Zahlen entstehen aus komplementären CRT-Idempotenten weitere ganzzahlige Größen. Diese Konstruktionen besitzen zunächst unterschiedliche Definitionen und unterschiedliche mathematische Ausgangspunkte.

Die vorliegende Arbeit untersucht Beziehungen, die sichtbar werden, wenn diese Strukturen in einem gemeinsamen KQ-Koordinatensystem betrachtet werden. Im Mittelpunkt stehen dabei nicht die isolierten Eigenschaften einer einzelnen Konstruktion, sondern Übergänge zwischen ihnen. Eine allgemeine Parabelverschiebungsfamilie beschreibt natürliche Produktpaare durch einen Verschiebungsparameter. Der zugehörige g -Vektor verbindet diese Produktdarstellungen mit dem kanonischen KQ-Produktpaar. Aus komplementären CRT-Idempotenten werden zwei ganzzahlige Quotienten abgeleitet, deren Summe und Produkt zusätzliche exakte Relationen erfüllen. Das Produkt dieser Quotienten erzeugt erneut einen KQ-Produktkörper und damit einen weiteren g -Vektor. Schließlich liefern die durch den Triatrad-Abstieg erzeugten KQ-Gruppen natürliche Bandgrenzen, innerhalb derer die CRT-abgeleiteten Quotienten lokalisiert werden können.

Die Bezeichnung Synadron wird in dieser Arbeit für diese gekoppelte Quotientenstruktur verwendet. Sie bezeichnet nicht die klassischen CRT-Idempotenten selbst und auch nicht lediglich das ungeordnete Paar der daraus abgeleiteten Quotienten. Gemeint ist die zusätzliche Struktur, die durch deren

¹ Meißner, A. (2025). KQ-KFS-Strukturen: Zur geometrischen Emergenz arithmetischer Realität. Eine Analyse Kanonisch-Quasiquadratischer Gruppen (KQ) und K-Fokaler-Schalenstrukturen (KFS) als Strukturformen informationstragender Räume. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.15683651>

² Meißner, A. (2026). Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen. Eine Vierbaumzerlegung und das offene Problem der terminalen Klassenzuordnung. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21603457>

algebraische Schließungsrelationen, ihre KQ-Gruppenbeziehung und ihre Verbindungen zu weiteren unabhängig definierten arithmetischen Konstruktionen entsteht.

Ein wesentliches Ziel der Arbeit besteht darin, klassische und neu eingeführte Begriffe klar voneinander zu trennen. Komplementäre CRT-Idempotenten sind klassische Objekte. Neu untersucht werden die daraus abgeleiteten Quotienten, deren innere Relationen sowie ihre Einbettung in die Parabelverschiebungs-, KQ- und Triatrad-Struktur.

1.2 Über Faktordarstellung zur geometrischen Produktkoordinate

Die übliche Darstellung eines natürlichen Produktes verwendet zwei Faktoren. Für ein geordnetes natürliches Teilerpaar sei

$$N = pq,$$

wobei

$$1 \leq p \leq q.$$

Die beiden Faktoren erscheinen in dieser Schreibweise als gleichberechtigte Größen. Für die in dieser Arbeit betrachtete geometrische Beschreibung wird diese Symmetrie bewusst aufgegeben. Statt des kleineren Faktors p wird sein Abstand zum größeren Faktor q verwendet.

Dieser elementare Koordinatenwechsel bildet den Ausgangspunkt der Parabelverschiebungstheorie. Die mathematische Aussage besteht nicht darin, dass ein Faktor durch eine Differenz ersetzt werden kann. Entscheidend ist, dass sämtliche natürlichen Produktpaare dadurch in eine gemeinsame Parabelfamilie eingeordnet werden können und dass diese Familie eine ausgezeichnete Referenzparabel enthält, die mit der KQ-Struktur zusammenfällt.

1.3 Ziel der Kreuzbetrachtung

Die Parabelverschiebung allein bestimmt aus einer gegebenen Zahl N noch keine unbekannte nichttriviale Produktzerlegung. Ebenso liefert die spätere Synadron-Struktur für sich genommen keine direkte Faktorisierungsvorschrift. Gegenstand dieser Arbeit ist deshalb nicht die Behauptung eines Faktorisierungsverfahrens.

Untersucht wird vielmehr, ob unterschiedliche Strukturen gegenseitig Informationen über ihre möglichen Positionen liefern. Dazu werden zunächst die Parabelverschiebung und der g -Vektor allgemein entwickelt. Anschließend werden die aus komplementären CRT-Idempotenten entstehenden Quotienten untersucht. Deren Produkt führt erneut in die Parabelverschiebungsstruktur zurück. Der Triatrad-Abstieg erzeugt schließlich unabhängig davon eine Folge kanonischer KQ-Gruppen, durch die sich der mögliche Aufenthaltsbereich des größeren CRT-abgeleiteten Quotienten einschränken lässt.

Die zentrale methodische Idee besteht damit in einer Übersetzung verschiedener arithmetischer Konstruktionen auf eine gemeinsame Koordinatenachse. KQ dient in diesem Zusammenhang nicht als Voraussetzung der klassischen CRT-Arithmetik und auch nicht als Voraussetzung des Triatrad-Beweises. Es dient als gemeinsames Koordinatensystem, in dem Beziehungen zwischen ursprünglich getrennten Strukturen formulierbar werden.

2 Die Parabelverschiebungstheorie

2.1 Elimination des kleineren Faktors

Es sei

$$N = pq$$

mit natürlichen Faktoren

$$1 \leq p \leq q.$$

Die Symbole p und q bezeichnen in diesem Kapitel zunächst lediglich die beiden geordneten Faktoren. Eine Primzahleigenschaft wird nicht vorausgesetzt.

Der Faktorabstand wird definiert durch

$$a = q - p.$$

Daraus folgt

$$p = q - a.$$

Die ursprüngliche Produktgleichung geht damit über in

$$N = q(q - a),$$

also

$$N = q^2 - aq.$$

Der kleinere Faktor p ist aus der Gleichung eliminiert. Für gegebenes q wird seine frühere Rolle vollständig vom Verschiebungsparameter a übernommen. Aus q und a kann der Faktor jederzeit rekonstruiert werden:

$$p = q - a.$$

Diese Darstellung besitzt eine unmittelbare geometrische Interpretation. Für festes q durchläuft der zweite Faktor bei wachsendem a die Folge

$$q, q - 1, q - 2, q - 3, \dots, 1.$$

Ein bestimmter Faktor p ist damit genau die Station

$$p = q - a$$

innerhalb dieser Folge. Entsprechend wird das Produkt $N = pq$ zu einer bestimmten Position innerhalb einer vollständigen Familie von Produktparabeln.

Die Eliminierung von p ist deshalb nicht als Verlust der Faktorinformation zu verstehen. Die Information wird lediglich von der Koordinate p in die Verschiebungskoordinate a überführt.

2.2 Die a -Familie

Aus

$$N = q^2 - aq$$

entsteht die Parabelfamilie

$$\mathcal{P}_a(x) = x^2 - ax.$$

Die Bezeichnung Parabelverschiebung lässt sich unmittelbar durch quadratische Ergänzung sichtbar machen:

$$\mathcal{P}_a(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Damit besitzt jedes Familienglied den Scheitelpunkt

$$S_a = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right).$$

Mit wachsendem a verschiebt sich der Scheitel sowohl horizontal als auch vertikal, während die quadratische Grundform unverändert bleibt. Der Parameter a bestimmt damit unmittelbar die geometrische Position des jeweiligen Familiengliedes.

Für ein natürliches Produktpaar mit oberem Faktor q gilt

$$N = q(q - a).$$

Ein solches Produkt entspricht somit einem Punkt derjenigen Parabel $\mathcal{P}_a$, deren Verschiebungsparameter mit dem Abstand der beiden Faktoren übereinstimmt.

2.2.1 Der Ausgangsfall $a = 0$

Für

$$a = 0$$

gilt

$$\mathcal{P}_0(x) = x^2.$$

Bei $x = q$ erhält man

$$N = q^2.$$

Die beiden Faktoren stimmen überein. Der Fall $a = 0$ bildet damit den quadratischen Ausgangspunkt der Familie.

2.2.2 Die erste Verschiebung $a = 1$

Für

$$a = 1$$

folgt

$$\mathcal{P}_1(x) = x^2 - x.$$

Bei $x = q$ gilt

$$N = q(q - 1).$$

Dies ist genau die Grundparabel der KQ-Struktur. KQ erscheint damit innerhalb der Parabelverschiebungsfamilie als das erste verschobene Glied unmittelbar nach der Quadratparabel.

Die beiden ersten Positionen der Familie lauten daher

$$a = 0: \quad x^2$$

und

$$a = 1: \quad x^2 - x.$$

Diese Stellung wird im weiteren Verlauf wesentlich, da die KQ-Parabel als Referenz für die Transformation zu den übrigen Produktparabeln verwendet werden kann.

2.2.3 Weitere Verschiebungen $a \geq 2$

Für größere Verschiebungen entsteht die Folge

$$a = 2: \quad \mathcal{P}_2(x) = x^2 - 2x,$$

$$a = 3: \quad \mathcal{P}_3(x) = x^2 - 3x,$$

$$a = 4: \quad \mathcal{P}_4(x) = x^2 - 4x,$$

und allgemein

$$a \geq 2: \quad \mathcal{P}_a(x) = x^2 - ax.$$

Für einen festen oberen Faktor q ergibt sich entsprechend die Produktfolge

$$q^2,$$

$$q(q - 1),$$

$$q(q - 2),$$

$$q(q - 3),$$

...

Ein konkretes natürliches Produktpaar $N = pq$ mit $p \leq q$ besitzt die Position

$$a = q - p.$$

Die Parabelverschiebung ordnet damit sämtliche natürlichen Produktpaare mit festem oberem Faktor q in eine gemeinsame geometrische Familie ein.

2.2.4 Der Randfall $a = q - 1$

Die größte Verschiebung, bei der der zweite natürliche Faktor noch positiv ist, lautet

$$a = q - 1.$$

Dann gilt

$$q - a = 1$$

und folglich

$$N = q.$$

Damit reicht die natürliche Verschiebungsfolge bei festem q von

$$q^2$$

bis zum trivialen Faktorprodukt

$$q \cdot 1.$$

Die vollständige Entwicklung besitzt somit die Form

$$q^2, q(q - 1), q(q - 2), \dots, q(q - a), \dots, q.$$

Der kleinere Faktor eines konkreten Teilerpaares erscheint innerhalb dieser Darstellung als die Station

$$q - a.$$

Seine Lage ist durch a vollständig bestimmt.

2.3 Das Geradon

Der Verschiebungsparameter a wird im Folgenden als Geradon bezeichnet. Das Geradon ist keine zusätzliche Größe neben a , sondern der Name dieser bereits definierten Verschiebungskoordinate.

Für ein geordnetes natürliches Produktpaar gilt damit

$$a = q - p.$$

Das Geradon besitzt zwei unmittelbar äquivalente Bedeutungen. Es ist einerseits der additive Abstand der beiden Faktoren. Andererseits bestimmt es diejenige Parabel

$$\mathcal{P}_a(x) = x^2 - ax,$$

auf der die betreffende Produktdarstellung liegt.

Für eine Zahl mit mehreren natürlichen Teilerpaaren entsteht entsprechend für jedes geordnete Teilerpaar eine eigene Geradon-Position. Die Parabelverschiebung ist daher nicht auf Semiprime beschränkt. Sie beschreibt natürliche Produktzerlegungen allgemein.

Erst bei einem echten Semiprim

$$N = pq$$

mit zwei verschiedenen Primfaktoren $p < q$ erhält dieselbe Größe die spezielle Bedeutung des Primfaktorabstandes. Die Definition des Geradons selbst benötigt diese Primzahleigenschaft jedoch nicht.

2.4 KQ als Referenzparabel der Familie

Für eine positive reelle Zahl N sei t_q die positive Lösung von

$$N = t_q(t_q - 1).$$

Damit gilt

$$t_q = \frac{1 + \sqrt{4N + 1}}{2}.$$

Weiter sei

$$t_p = t_q - 1.$$

Dann folgt unmittelbar

$$t_p t_q = N.$$

Das Paar

$$(t_p, t_q)$$

ist somit eine kanonische reelle Produktdarstellung von N auf der Parabel

$$y = x^2 - x.$$

Im Allgemeinen sind t_p und t_q keine natürlichen Teiler von N . Sie bilden vielmehr das reelle Referenzpaar, von dem aus natürliche Produktpaare derselben Zahl beschrieben werden können.

Da

$$t_q - t_p = 1,$$

liegt dieses Referenzpaar auf dem Familienglied

$$a = 1.$$

KQ besitzt damit innerhalb der Parabelverschiebung eine ausgezeichnete Stellung: Die KQ-Parabel ist die erste Verschiebung nach der Quadratparabel und liefert zugleich für jedes positive N ein eindeutig bestimmtes reelles Produktpaar.

Ist zusätzlich ein natürliches Teilerpaar

$$N = pq$$

mit

$$p \leq q$$

gegeben, so kann dessen Lage relativ zu diesem reellen KQ-Referenzpaar beschrieben werden. Diese Transformation führt zum g -Vektor.

2.5 Der g -Vektor

Für ein festes N seien

$$t_p t_q = N$$

die reellen KQ-Referenzkoordinaten mit

$$t_q = t_p + 1.$$

Weiter sei

$$N = pq$$

ein natürliches Teilerpaar mit

$$p \leq q.$$

Der zu diesem natürlichen Produktpaar gehörende g -Vektor wird definiert durch

$$g = \frac{q}{t_q}.$$

Damit gilt

$$q = g t_q.$$

Da sowohl das reelle KQ-Paar als auch das natürliche Teilerpaar dasselbe Produkt N besitzen,

$$pq = t_p t_q,$$

folgt gleichzeitig

$$p = \frac{t_p}{g}.$$

Der g -Vektor verbindet somit das reelle KQ-Referenzpaar mit dem gewählten natürlichen Produktpaar:

$$(t_p, t_q) \rightarrow \left(\frac{t_p}{g}, g t_q \right).$$

Die Produktinvarianz ist unmittelbar:

$$\frac{t_p}{g} \cdot g t_q = t_p t_q = N.$$

Der g -Vektor verändert daher nicht das Produkt. Er beschreibt die Transformation der beiden reellen KQ-Faktoren in ein anderes Produktpaar derselben Zahl.

Nicht jeder positive reelle Wert von g erzeugt dabei ein natürliches Teilerpaar. Ein g -Wert gehört genau dann zu einer natürlichen Produktzerlegung von N , wenn

$$g t_q \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{t_p}{g} \in \mathbb{N}.$$

Besitzt N mehrere natürliche Teilerpaare, so besitzt jedes dieser Paare einen eigenen zugehörigen g -Wert. Die Definition ist damit nicht auf Semiprime beschränkt.

2.6 Die ausgezeichnete Referenzposition $g = 1$

Der Wert

$$g = 1$$

lässt das reelle KQ-Referenzpaar unverändert:

$$\left(\frac{t_p}{1}, 1 \cdot t_q\right) = (t_p, t_q).$$

Damit entspricht

$$g = 1$$

exakt der KQ-Referenzposition

$$a = 1.$$

Hierbei ist zu unterscheiden, ob das KQ-Referenzpaar selbst ganzzahlig ist. Für eine allgemeine Zahl N sind t_p und t_q reelle Größen. Nur wenn N selbst eine Rechteckzahl

$$N = m(m + 1)$$

ist, werden beide KQ-Koordinaten ganzzahlig und bilden zugleich ein natürliches Teilerpaar.

Die Position $g = 1$ bleibt jedoch unabhängig davon die kanonische reelle Referenz der gesamten Transformation.

Für die Quadratposition

$$a = 0$$

gilt

$$p = q = \sqrt{N}.$$

Da für positive N

$$\sqrt{N} < t_q$$

gilt, folgt

$$g = \frac{\sqrt{N}}{t_q} < 1.$$

Für eine natürliche Produktdarstellung mit

$$a \geq 2$$

gilt dagegen

$$q - p > t_q - t_p = 1.$$

Da die Geradonfunktion des folgenden Abschnitts streng monoton mit g wächst und bei $g = 1$ den Wert 1 annimmt, folgt

$$a \geq 2 \quad \Rightarrow \quad g > 1.$$

Damit besitzt die Parabelverschiebungsfamilie die Ordnung

$$a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g < 1,$$

$$a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g = 1,$$

$$a \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad g > 1,$$

wobei $g = 1$ die reelle KQ-Referenzposition bezeichnet und ein natürliches Teilerpaar auf dieser Position nur im ganzzahligen KQ-Sonderfall vorliegt.

2.7 Kopplung von Geradon und g -Vektor

Geradon und g -Vektor beschreiben für festes N dieselbe Produktverschiebung in zwei unterschiedlichen Koordinaten.

Für ein natürliches Produktpaar gilt

$$a = q - p.$$

Mit

$$q = g t_q$$

und

$$p = \frac{t_p}{g}$$

folgt unmittelbar

$$a(g) = g t_q - \frac{t_p}{g}.$$

Damit ist das Geradon bei gegebenem zulässigem g -Wert vollständig bestimmt.

Die beiden Bestandteile besitzen eine direkte Produktbedeutung:

$$g t_q = q$$

und

$$\frac{t_p}{g} = p.$$

Daher ist

$$a(g) = q - p.$$

Für die KQ-Referenzposition

$$g = 1$$

folgt

$$a(1) = t_q - t_p = 1.$$

Die Abhängigkeit ist für positive g streng monoton. Es gilt

$$\frac{d}{dg} a(g) = t_q + \frac{t_p}{g^2}.$$

Da

$$t_p > 0$$

und

$$t_q > 0$$

sind, folgt

$$\frac{d}{dg} a(g) > 0.$$

Somit besitzt jeder Geradenwert höchstens einen positiven zugehörigen g -Wert.

Die Beziehung lässt sich umkehren. Aus

$$a = g t_q - \frac{t_p}{g}$$

folgt

$$t_q g^2 - a g - t_p = 0.$$

Die positive Lösung lautet

$$g(a) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4t_p t_q}}{2t_q}.$$

Mit

$$t_p t_q = N$$

ergibt sich

$$g(a) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4N}}{2t_q}.$$

Für festes N stehen Geraden und g -Vektor damit in einer eindeutigen kontinuierlichen Beziehung:

$$a \leftrightarrow g.$$

Die natürlichen Produktzerlegungen bilden innerhalb dieser kontinuierlichen Beziehung die diskreten Werte, für die die erzeugten Faktoren tatsächlich natürliche Zahlen sind.

2.8 Rekonstruktion und Ganzzahligkeitsbedingung

Aus

$$N = q(q - a)$$

folgt

$$q^2 - aq - N = 0.$$

Die positive Lösung ist

$$q = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4N}}{2}.$$

Der zweite Faktor lautet

$$p = q - a,$$

also

$$p = \frac{\sqrt{a^2 + 4N} - a}{2}.$$

Für ein beliebiges reelles $a \geq 0$ liefern diese Formeln zunächst ein reelles Produktpaar mit Produkt N . Im Zusammenhang mit natürlichen Produktzerlegungen ist das Geraden dagegen ganzzahlig:

$$a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Für einen solchen ganzzahligen Geradenkandidaten entsteht genau dann ein natürliches Teilerpaar, wenn die Diskriminante

$$a^2 + 4N$$

ein vollständiges Quadrat ist. Es muss also ein $b \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$b^2 = a^2 + 4N.$$

Dann gilt

$$q = \frac{a + b}{2}$$

und

$$p = \frac{b - a}{2}.$$

Da

$$b^2 - a^2 = 4N,$$

gilt

$$b^2 \equiv a^2 \pmod{4}.$$

Quadratzahlen sind modulo 4 nur zu 0 oder 1 kongruent. Daher besitzen a und b dieselbe Parität, sodass

$$\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z}$$

und

$$\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $N > 0$ folgt außerdem

$$b > a,$$

und damit

$$p > 0, \quad q > 0.$$

Die natürlichen Teilerpaare von N können somit als diskrete Ganzzahligkeitstreffer innerhalb der kontinuierlichen Parabelverschiebungsfamilie charakterisiert werden:

$$a^2 + 4N = b^2, \quad a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad b \in \mathbb{N}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$(b-a)(b+a) = 4N.$$

Für einen solchen Treffer können die beiden Faktoren unmittelbar aus a rekonstruiert werden:

$$q = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4N}}{2},$$

$$p = \frac{\sqrt{a^2 + 4N} - a}{2}.$$

Alternativ gilt über den zugehörigen g -Vektor

$$q = g t_q$$

und

$$p = \frac{t_p}{g}.$$

Die Elimination des kleineren Faktors am Beginn der Parabelverschiebung ist damit vollständig reversibel. Die Faktorinformation wird nicht entfernt, sondern von der Koordinate p in die Verschiebungskoordinate a überführt. Die zusätzliche Quadratbedingung kennzeichnet genau diejenigen ganzzahligen Geradenpositionen der kontinuierlichen Parabelfamilie, die natürlichen Teilerpaaren entsprechen.

2.9 Beispiel $N = 589$

Für die natürliche Produktdarstellung

$$589 = 19 \cdot 31$$

gilt

$$p = 19$$

und

$$q = 31.$$

Das Geraden beträgt

$$a = q - p = 12.$$

Der kleinere Faktor kann daher geschrieben werden als

$$p = q - a = 31 - 12 = 19.$$

Die Produktdarstellung geht über in

$$N = q^2 - aq.$$

Für das Beispiel folgt

$$589 = 31^2 - 12 \cdot 31.$$

Damit liegt das Produkt bei $q = 31$ auf der Parabel

$$\mathcal{P}_{12}(x) = x^2 - 12x.$$

Die KQ-Referenzkoordinaten derselben Zahl sind

$$t_q = \frac{1 + \sqrt{2357}}{2} \approx 24.77447219$$

und

$$t_p = t_q - 1 \approx 23.77447219.$$

Der zu diesem Produktpaar gehörende g -Vektor ist

$$g = \frac{31}{t_q} \approx 1.25128801.$$

Gleichzeitig gilt

$$g = \frac{t_p}{19}.$$

Die Geradonfunktion reproduziert daraus wieder exakt den Faktorabstand:

$$a(g) = g t_q - \frac{t_p}{g} = 31 - 19 = 12.$$

Das Beispiel zeigt damit die drei äquivalenten Beschreibungen desselben Produktes:

$$589 = 19 \cdot 31,$$

$$589 = 31^2 - 12 \cdot 31,$$

und

$$(19, 31) = \left(\frac{t_p}{g}, g t_q \right).$$

Die erste Darstellung verwendet zwei Faktoren. Die zweite eliminiert den kleineren Faktor zugunsten des Geradons. Die dritte beschreibt dasselbe Produktpaar als Transformation der KQ-Referenzkoordinaten.

2.10 Semiprime als Spezialfall

Die bisherige Konstruktion setzt keine Primfaktoren voraus. Sie gilt für jedes natürliche Teilerpaar eines positiven N . Für ein echtes Semiprim wird lediglich eine zusätzliche arithmetische Bedingung eingeführt.

Sei

$$N = pq$$

mit verschiedenen Primzahlen

$$p < q.$$

Dann bezeichnet das Geradon

$$a = q - p$$

den Abstand der beiden Primfaktoren. Die Parabeldarstellung lautet unverändert

$$N = q^2 - aq.$$

Ebenso bleibt die g -Transformation unverändert:

$$q = g t_q,$$

$$p = \frac{t_p}{g},$$

und damit

$$a(g) = g t_q - \frac{t_p}{g}.$$

Der Semiprimfall ist somit keine eigene Parabelverschiebungstheorie. Er ist eine spezielle Teilmenge der allgemeinen natürlichen Produktstruktur, bei der beide Faktoren zusätzlich prim sind.

Diese Trennung wird im Folgenden wichtig. Die allgemeine Parabelverschiebung und der g -Vektor werden später auf einen Produktkörper angewendet, dessen Faktoren keine Primzahlen sein müssen. Gerade diese erneute Anwendung führt zu einer der zentralen Kreuzrelationen der vorliegenden Arbeit.

3 Komplementäre CRT-Idempotenten und abgeleitete Quotienten

3.1 Klassische Ausgangsstruktur

Für den folgenden Abschnitt sei zunächst ein echtes Semiprim gegeben,

$$N = pq,$$

wobei $p < q$ verschiedene Primzahlen sind. Nach dem chinesischen Restsatz besitzt der Restklassenring modulo N neben den trivialen Idempotenten 0 und 1 genau zwei nichttriviale Idempotenten. Für ihre positiven Standardrepräsentanten seien die Bezeichnungen e_1 und e_2 verwendet.

Sie können durch die gemischten Kongruenzbedingungen charakterisiert werden:

$$e_1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad e_1 \equiv 1 \pmod{q},$$

und

$$e_2 \equiv 1 \pmod{p}, \quad e_2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Damit gilt für beide

$$e_i^2 \equiv e_i \pmod{N}.$$

Die beiden Idempotenten sind komplementär. Da

$$e_1 + e_2 \equiv 1 \pmod{N}$$

gilt und beide positiven Standardrepräsentanten zwischen 1 und $N - 1$ liegen, folgt

$$e_1 + e_2 = N + 1.$$

Diese Idempotentenstruktur ist klassisch. Gegenstand der folgenden Untersuchung sind die aus ihr abgeleiteten ganzzahligen Quotienten und deren zusätzliche Beziehungen.

3.2 Die abgeleiteten CRT-Quotienten

Aus der Idempotenz

$$e_i^2 \equiv e_i \pmod{N}$$

folgt

$$N \mid e_i(e_i - 1).$$

Daher sind die beiden Größen

$$Q_i = \frac{e_i(e_i - 1)}{N}$$

ganze Zahlen.

Die Größen Q_1 und Q_2 werden im Folgenden als abgeleitete CRT-Quotienten bezeichnet. Sie sind nicht mit den Idempotenten selbst identisch, sondern entstehen erst durch Division der jeweiligen Idempotenzdifferenz durch N .

Da die Funktion

$$e \mapsto e(e - 1)$$

für positive $e \geq 1$ monoton wächst, bleibt die Reihenfolge der Idempotenten erhalten.
Für

$$e_- = \min(e_1, e_2), \quad e_+ = \max(e_1, e_2)$$

gilt daher auch

$$Q_- = \min(Q_1, Q_2), \quad Q_+ = \max(Q_1, Q_2).$$

Die Differenz der beiden Quotienten besitzt eine besonders einfache Form:

$$Q_+ - Q_- = \frac{e_+(e_+ - 1) - e_-(e_- - 1)}{N}.$$

Faktorisieren liefert

$$Q_+ - Q_- = \frac{(e_+ - e_-)(e_+ + e_- - 1)}{N}.$$

Wegen

$$e_+ + e_- = N + 1$$

folgt

$$Q_+ - Q_- = e_+ - e_-.$$

Die Differenz der beiden komplementären Idempotenten wird somit unverändert auf die beiden abgeleiteten Quotienten übertragen.

3.3 Eine weitere ganzzahlige Größe

Aus der Komplementarität folgt auch

$$e_2 - 1 \equiv -e_1 \pmod{N}.$$

Damit gilt

$$(e_1 - 1)(e_2 - 1) \equiv -(e_1 - 1)e_1 \equiv 0 \pmod{N}.$$

Folglich ist

$$C = \frac{(e_1 - 1)(e_2 - 1)}{N}$$

eine ganze Zahl.

Zwischen C und dem Produkt der beiden Idempotenten besteht eine unmittelbare Beziehung. Es gilt

$$e_1 e_2 - (e_1 - 1)(e_2 - 1) = e_1 + e_2 - 1.$$

Mit

$$e_1 + e_2 = N + 1$$

folgt

$$e_1 e_2 - (e_1 - 1)(e_2 - 1) = N.$$

Nach Division durch N erhält man

$$\frac{e_1 e_2}{N} = C + 1.$$

Damit treten aus demselben komplementären Idempotentenpaar zwei unmittelbar aufeinanderfolgende ganze Zahlen auf:

$$C$$

und

$$C + 1.$$

3.4 Produktschließung der CRT-Quotienten

Das Produkt der beiden abgeleiteten Quotienten lautet

$$Q_1 Q_2 = \frac{e_1(e_1 - 1)e_2(e_2 - 1)}{N^2}.$$

Die Faktoren können neu gruppiert werden:

$$Q_1 Q_2 = \frac{e_1 e_2}{N} \cdot \frac{(e_1 - 1)(e_2 - 1)}{N}.$$

Mit

$$\frac{e_1 e_2}{N} = C + 1$$

und

$$\frac{(e_1 - 1)(e_2 - 1)}{N} = C$$

folgt

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1).$$

Setzt man

$$H = Q_1 Q_2,$$

so gilt damit exakt

$$H = C(C + 1).$$

Das Produkt der beiden CRT-Quotienten ist folglich stets eine Rechteckzahl aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

In der KQ-Struktur ist

$$C(C + 1)$$

ein $N0$ -Pol. Seine reellen KQ-Koordinaten sind ganzzahlig:

$$t_p(H) = C,$$

$$t_q(H) = C + 1.$$

Entsprechend gilt für den ganzzahligen KQ-Index

$$G(H) = C + 1.$$

Dabei ist zwischen dem KQ-Index und der strukturellen Lage zu unterscheiden. Der Wert $H = C(C + 1)$ trägt den Index $C + 1$, ist als Rechteckzahl jedoch der $N0$ -Pol dieser KQ-Gruppe und kein reguläres Gruppenmitglied.

Die CRT-Quotienten erzeugen somit aus ihrer Produktschließung exakt einen neuen KQ- $N0$ -Körper. Diese Eigenschaft bildet später die Grundlage für die erneute Anwendung des allgemeinen g -Vektors auf

$$H = Q_- Q_+.$$

3.5 Summenrelation der Quotienten

Auch die Summe der beiden Quotienten lässt sich vollständig auf N und C zurückführen:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{e_1(e_1 - 1) + e_2(e_2 - 1)}{N}.$$

Für den Zähler gilt

$$e_1^2 + e_2^2 - e_1 - e_2.$$

Mit

$$e_1 + e_2 = N + 1$$

und

$$e_1 e_2 = N(C + 1)$$

folgt

$$e_1^2 + e_2^2 = (e_1 + e_2)^2 - 2e_1 e_2.$$

Daher ergibt sich

$$Q_1 + Q_2 = N - 1 - 2C.$$

Nach Umstellung folgt

$$N = Q_1 + Q_2 + 2C + 1.$$

Aus

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1)$$

ergibt sich gleichzeitig

$$4Q_1 Q_2 + 1 = 4C(C + 1) + 1.$$

Die rechte Seite ist ein vollständiges Quadrat:

$$4C(C + 1) + 1 = (2C + 1)^2.$$

Da $C \geq 0$ gilt,

$$\sqrt{4Q_1 Q_2 + 1} = 2C + 1.$$

Damit erhält die Summenrelation die symmetrische Form

$$N = Q_1 + Q_2 + \sqrt{4Q_1 Q_2 + 1}.$$

Äquivalent gilt

$$(N - Q_1 - Q_2)^2 = 4Q_1 Q_2 + 1.$$

Diese Beziehung enthält die Ausgangszahl N ausschließlich zusammen mit den beiden abgeleiteten Quotienten. Die Hilfsgröße C ist für ihre Formulierung nicht mehr erforderlich.

3.6 Eine exakte Quadratwurzelrelation

Die Produktschließung erlaubt eine weitere Darstellung. Aus

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1)$$

und

$$Q_1 + Q_2 = N - 1 - 2C$$

folgt

$$(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 = Q_1 + Q_2 + 2\sqrt{Q_1 Q_2}.$$

Damit ergibt sich

$$(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 = N - 1 - 2C + 2\sqrt{C(C + 1)}.$$

Folglich ist

$$N - (\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 = 2C + 1 - 2\sqrt{C(C + 1)}.$$

Die rechte Seite lässt sich als Quadrat schreiben:

$$2C + 1 - 2\sqrt{C(C + 1)} = (\sqrt{C + 1} - \sqrt{C})^2.$$

Somit gilt exakt

$$N - (\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 = (\sqrt{C + 1} - \sqrt{C})^2.$$

Da

$$0 < (\sqrt{C + 1} - \sqrt{C})^2 < 1$$

für $C \geq 1$ gilt, folgt unmittelbar

$$N - 1 < (\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2 < N.$$

Nach Wurzelziehen erhält man

$$\sqrt{N - 1} < \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2} < \sqrt{N}.$$

Die beiden abgeleiteten Quotienten besitzen damit eine gemeinsame Quadratwurzelgröße, die stets in dem schmalen Intervall zwischen $\sqrt{N - 1}$ und $\sqrt{N}$ liegt.

Diese Beziehung wird später für die diskrete KQ-Gruppenrelation relevant. Sie zeigt bereits auf kontinuierlicher Ebene, dass die beiden Quotienten nicht unabhängig voneinander verteilt sind.

3.7 Der zweite Produktkörper und der g -Vektor g_H

Die allgemeine Definition des g -Vektors aus Kapitel 2 kann unmittelbar auf den neuen Produktkörper

$$H = Q_- Q_+$$

angewendet werden.

Da

$$H = C(C + 1)$$

gilt, besitzt H das KQ-Referenzpaar

$$(C, C + 1).$$

Das natürliche Produktpaar ist dagegen

$$(Q_-, Q_+).$$

Nach der allgemeinen Definition des g -Vektors folgt daher

$$g_H = \frac{Q_+}{C + 1}.$$

Gleichzeitig gilt

$$g_H = \frac{C}{Q_-}.$$

Damit ist

$$g_H = \frac{Q_+}{C + 1} = \frac{C}{Q_-}.$$

Der Index H kennzeichnet dabei lediglich den Produktkörper, auf den der bereits allgemein definierte g -Vektor angewendet wird. g_H ist keine neue Art von Vektor.

Durch Einsetzen der CRT-Darstellungen lässt sich g_H direkt auf die beiden komplementären Idempotenten zurückführen. Es gilt

$$Q_+ = \frac{e_+(e_+ - 1)}{N}$$

und

$$C + 1 = \frac{e_- e_+}{N}.$$

Daraus folgt

$$g_H = \frac{e_+ - 1}{e_-}.$$

Der g -Vektor des Quotientenproduktes ist somit unmittelbar durch das ursprüngliche komplementäre Idempotentenpaar bestimmt.

Da

$$(e_+ - 1) + e_- = N,$$

folgt außerdem

$$\frac{g_H}{1 + g_H} = \frac{e_+ - 1}{N}.$$

Entsprechend gilt

$$\frac{1}{1 + g_H} = \frac{e_-}{N}.$$

Damit parametrisiert g_H die komplementäre Aufteilung von N zwischen e_- und $e_+ - 1$.

3.8 Rückführung von Q_+ auf g_H

Setze

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}.$$

Dann gilt

$$e_+ - 1 = Nu$$

und damit

$$e_+ = Nu + 1.$$

Für den größeren Quotienten folgt daher

$$Q_+ = \frac{e_+(e_+ - 1)}{N}.$$

Einsetzen ergibt

$$Q_+ = \frac{(Nu + 1)Nu}{N}.$$

Somit

$$Q_+ = Nu^2 + u.$$

Wegen

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}$$

erhält man die direkte Darstellung

$$Q_+ = N \left(\frac{g_H}{1 + g_H} \right)^2 + \frac{g_H}{1 + g_H}.$$

Der größere CRT-Quotient ist damit bei gegebenem N vollständig durch den g -Vektor des Quotientenproduktes bestimmt.

Diese Beziehung wird später eine unmittelbare Verbindung zu den Triatrad-Bändern ermöglichen. Die Parabelverschiebung liefert über g_H eine kontinuierliche Produktkoordinate, während der Triatrad dieselbe Größe über diskrete KQ-Gruppengrenzen lokalisiert.

3.9 Faktorinformation im gekürzten g_H

Sei

$$g_H = \frac{A}{B}$$

die vollständig gekürzte Darstellung mit teilerfremden positiven natürlichen Zahlen A und B .

Aus

$$g_H = \frac{e_+ - 1}{e_-}$$

folgt, dass mit

$$d = \gcd(e_+ - 1, e_-)$$

die Darstellungen

$$e_+ - 1 = dA$$

und

$$e_- = dB$$

gelten.

Wegen

$$(e_+ - 1) + e_- = N$$

folgt unmittelbar

$$N = d(A + B).$$

Damit gilt allgemein

$$A + B \mid N.$$

Die Größe $A + B$ ist somit nicht lediglich eine Folge der Kürzung von g_H , sondern selbst ein Faktorblock der Ausgangszahl.

Die Bedeutung des Kürzungsfaktors d lässt sich ebenfalls direkt bestimmen. Aus

$$e_+ - 1 = N - e_-$$

folgt

$$d = \gcd(e_+ - 1, e_-) = \gcd(N - e_-, e_-) = \gcd(N, e_-).$$

Da e_- ein nichttrivialer Idempotent modulo N ist, ist dieser größte gemeinsame Teiler ein echter nichttrivialer Faktorblock von N .

Im Semiprimfall

$$N = pq$$

mit verschiedenen Primzahlen $p < q$ gilt daher

$$d \in \{p, q\}.$$

Da

$$N = d(A + B),$$

muss $A + B$ der jeweils komplementäre Primfaktor sein. Somit gilt

$$\{d, A + B\} = \{p, q\}.$$

Insbesondere folgt

$$A + B \in \{p, q\}.$$

Die gekürzte rationale Darstellung von g_H enthält damit die beiden komplementären CRT-Faktorblöcke in zwei verschiedenen Formen: Der herausgekürzte gemeinsame Faktor d liefert den einen Faktorblock, während die Summe von Zähler und Nenner den anderen liefert.

Diese Beziehung stellt keine Faktorisierungsmethode aus N allein dar. Die Bestimmung von g_H setzt die zugehörige CRT-Quotientenstruktur bereits voraus. Die Aussage beschreibt daher eine innere Struktur der Quotienten und keine unmittelbare Berechnung unbekannter Faktoren aus N .

3.10 Beispiel $N = 589$

Für

$$N = 589 = 19 \cdot 31$$

lauten die beiden nichttrivialen positiven CRT-Idempotenten

$$e_- = 248$$

und

$$e_+ = 342.$$

Sie erfüllen

$$248 + 342 = 590 = N + 1.$$

Die abgeleiteten Quotienten sind

$$Q_- = \frac{248 \cdot 247}{589} = 104$$

und

$$Q_+ = \frac{342 \cdot 341}{589} = 198.$$

Für C erhält man

$$C = \frac{247 \cdot 341}{589} = 143.$$

Damit gilt

$$C + 1 = 144.$$

Die Produktschließung lautet somit

$$104 \cdot 198 = 143 \cdot 144.$$

Der Quotientenproduktkörper ist

$$H = 20592.$$

Sein KQ-Referenzpaar ist exakt

$$(143, 144),$$

während das zugehörige natürliche Produktpaar

$$(104, 198)$$

lautet.

Der g -Vektor dieses Produktkörpers ist daher

$$g_H = \frac{198}{144} = \frac{143}{104} = \frac{11}{8}.$$

Dieselbe Größe ergibt sich unmittelbar aus den Idempotenten:

$$g_H = \frac{342 - 1}{248} = \frac{341}{248} = \frac{11}{8}.$$

In vollständig gekürzter Form ist somit

$$A = 11$$

und

$$B = 8.$$

Daher

$$A + B = 19,$$

also einer der beiden Primfaktoren von 589.

Der gemeinsame Kürzungsfaktor beträgt

$$d = 31.$$

Entsprechend gilt

$$589 = 31(11 + 8).$$

Das Beispiel zeigt gleichzeitig die beiden unterschiedlichen g -Vektoren der bisherigen Konstruktion. Für die ursprüngliche Produktdarstellung

$$589 = 19 \cdot 31$$

gilt ein g -Vektor relativ zum reellen KQ-Paar von 589. Für den abgeleiteten Produktkörper

$$H = 104 \cdot 198$$

gilt dagegen

$$g_H = \frac{11}{8}.$$

Es handelt sich um dieselbe allgemeine Transformation, angewendet auf zwei unterschiedliche Produktkörper. Die Zahlenwerte der beiden g -Vektoren müssen daher nicht übereinstimmen.

4 Das Synadron

4.1 Begriffliche Festlegung

Die beiden CRT-Idempotenten e_1, e_2 sind klassische arithmetische Objekte. Auch ihre Komplementarität folgt unmittelbar aus der CRT-Struktur. Die Bezeichnung Synadron wird daher nicht für diese Idempotenten verwendet.

Ebenso bezeichnet Synadron nicht lediglich das Zahlenpaar (Q_1, Q_2) . Die Quotienten sind zunächst nur aus den Idempotenten abgeleitete ganze Zahlen.

Als Synadron wird in dieser Arbeit die gekoppelte Struktur der beiden abgeleiteten CRT-Quotienten bezeichnet, soweit diese über zusätzliche gemeinsame Relationen miteinander und mit der Ausgangszahl N verbunden sind. Zu dieser Struktur gehören insbesondere die Produktschließung

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1),$$

die symmetrische Identität

$$N = Q_1 + Q_2 + \sqrt{4Q_1 Q_2 + 1},$$

die daraus hervorgehende kontinuierliche Nähe ihrer KQ-Koordinaten sowie die später hergeleitete diskrete Dreiwertesbeziehung ihrer KQ-Gruppen.

Der Begriff bezeichnet damit eine zusätzliche Kopplung klassisch erzeugter Größen. Er ersetzt keine klassische CRT-Terminologie.

4.2 Die KQ-Gruppenabbildung

Für einen positiven reellen Wert x sei wie zuvor

$$t_q(x) = \frac{1 + \sqrt{4x + 1}}{2}.$$

Die zugehörige ganzzahlige KQ-Gruppennummer sei

$$G(x) = \lfloor t_q(x) \rfloor.$$

Damit gilt für jede positive natürliche Zahl x

$$G(x) = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{4x + 1}}{2} \right\rfloor.$$

Die diskrete Synadron-Beziehung betrifft nicht unmittelbar die Größen Q_1, Q_2, N , sondern ihre jeweiligen KQ-Gruppennummern

$$G(Q_1), \quad G(Q_2), \quad G(N).$$

Die zugrunde liegende kontinuierliche Beziehung wird daher zunächst auf der Ebene von t_q untersucht.

4.3 Kontinuierliche Kopplung

Für die beiden abgeleiteten Quotienten gilt

$$\frac{1}{2} < t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N) < 1.$$

Die Summe der beiden kontinuierlichen KQ-Koordinaten liegt damit stets zwischen einer halben und einer ganzen Einheit oberhalb der KQ-Koordinate von N .

Setzt man

$$D = t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N),$$

so lautet die Aussage

$$\frac{1}{2} < D < 1.$$

Diese enge Schranke ist die kontinuierliche Grundlage der späteren diskreten Dreiwertesbeziehung. Da beim Übergang von t_q zu $G = \lfloor t_q \rfloor$ nur die jeweiligen Nachkommateile entfernt werden, kann eine Abweichung mit einer Breite von weniger als einer ganzen Einheit nur eine begrenzte Zahl ganzzahliger Summenwerte erzeugen.

Die vollständige Herleitung dieser Schranke und der daraus folgenden Dreiwertesbeziehung erfolgt im nächsten Abschnitt.

4.4 Herleitung der kontinuierlichen Schranke

Aus

$$t_q(x) = \frac{1 + \sqrt{4x + 1}}{2}$$

folgt

$$t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N) = \frac{1 + \sqrt{4Q_1 + 1} + \sqrt{4Q_2 + 1} - \sqrt{4N + 1}}{2}.$$

Zu zeigen ist daher zunächst

$$0 < \sqrt{4Q_1 + 1} + \sqrt{4Q_2 + 1} - \sqrt{4N + 1} < 1.$$

Aus den zuvor bewiesenen Beziehungen

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1)$$

und

$$Q_1 + Q_2 = N - 1 - 2C$$

ergibt sich

$$(4Q_1 + 1)(4Q_2 + 1) = 16C^2 + 8C + 4N - 3.$$

Für die untere Schranke genügt es zu zeigen,

$$\sqrt{4Q_1 + 1} + \sqrt{4Q_2 + 1} > \sqrt{4N + 1}.$$

Nach Quadrieren ist dies äquivalent zu

$$2\sqrt{(4Q_1 + 1)(4Q_2 + 1)} > 8C + 3.$$

Da $Q_1, Q_2 \geq 1$ gilt, folgt aus

$$N = Q_1 + Q_2 + 2C + 1$$

insbesondere

$$N - C \geq 3.$$

Damit gilt

$$16C^2 + 8C + 4N - 3 > \left(4C + \frac{3}{2}\right)^2.$$

Folglich ist die verlangte untere Ungleichung erfüllt.

Für die obere Schranke ist zu zeigen,

$$\sqrt{4Q_1 + 1} + \sqrt{4Q_2 + 1} < \sqrt{4N + 1} + 1.$$

Nach Quadrieren reduziert sich dies auf

$$\sqrt{(4Q_1 + 1)(4Q_2 + 1)} < 4C + 2 + \sqrt{4N + 1}.$$

Die rechte Seite ist positiv. Ein erneutes Quadrieren liefert unmittelbar

$$\begin{aligned} (4C + 2 + \sqrt{4N + 1})^2 - (4Q_1 + 1)(4Q_2 + 1) \\ = 8C + 8 + 2(4C + 2)\sqrt{4N + 1}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist strikt positiv. Damit gilt auch die obere Schranke.

Somit folgt

$$0 < \sqrt{4Q_1 + 1} + \sqrt{4Q_2 + 1} - \sqrt{4N + 1} < 1.$$

Eingesetzt in die Definition von t_q ergibt sich der kontinuierliche Synadron-Satz:

$$\frac{1}{2} < t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N) < 1.$$

Die beiden kontinuierlichen KQ-Koordinaten der CRT-Quotienten besitzen daher eine gemeinsame Summe, die stets weniger als eine Einheit und mehr als eine halbe Einheit oberhalb der Koordinate von N liegt.

4.5 Übergang zu den ganzzahligen KQ-Gruppen

Für jeden positiven Wert x kann die kontinuierliche KQ-Koordinate in ihren ganzzahligen und gebrochenen Anteil zerlegt werden:

$$t_q(x) = G(x) + \alpha_x,$$

wobei

$$0 \leq \alpha_x < 1.$$

Für die drei beteiligten Werte gilt damit

$$t_q(Q_1) = G(Q_1) + \alpha_1,$$

$$t_q(Q_2) = G(Q_2) + \alpha_2$$

und

$$t_q(N) = G(N) + \alpha_N.$$

Sei

$$D = t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N).$$

Dann ist

$$\frac{1}{2} < D < 1.$$

Einsetzen der ganzzahligen und gebrochenen Anteile ergibt

$$G(Q_1) + G(Q_2) - G(N) = \alpha_N + D - \alpha_1 - \alpha_2.$$

Die linke Seite ist ganzzahlig. Für die rechte Seite gilt wegen

$$0 \leq \alpha_N < 1,$$

$$0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < 2$$

und

$$\frac{1}{2} < D < 1$$

die Schranke

$$-\frac{3}{2} < \alpha_N + D - \alpha_1 - \alpha_2 < 2.$$

Innerhalb dieses offenen Intervalls liegen nur die drei ganzen Zahlen

$$-1, 0, 1.$$

Damit folgt die diskrete Dreiwertesbeziehung

$$G(Q_1) + G(Q_2) = G(N) + \varepsilon,$$

wobei

$$\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}.$$

Der Korrekturterm ε entsteht ausschließlich beim Übergang von den kontinuierlichen KQ-Koordinaten zu ihren ganzzahligen Gruppennummern. Er ist damit ein diskreter Übertragungswert der jeweiligen Nachkommaanteile.

4.6 Der Synadron-Dreiwertesatz

Für ein echtes Semiprim

$$N = pq$$

mit verschiedenen Primzahlen $p < q$, den beiden komplementären nichttrivialen CRT-Idempotenten e_1, e_2 und den daraus abgeleiteten Quotienten

$$Q_i = \frac{e_i(e_i - 1)}{N}$$

gilt

$$G(Q_1) + G(Q_2) = G(N) + \varepsilon$$

mit

$$\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}.$$

Die Aussage folgt aus der zuvor bewiesenen kontinuierlichen Schranke

$$\frac{1}{2} < t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N) < 1.$$

Damit sind die beiden KQ-Gruppen der Quotienten nicht unabhängig voneinander. Ist die Gruppe eines Quotienten bekannt, so besitzt die Gruppe des zweiten Quotienten höchstens drei mögliche Werte.

Setzt man

$$X = G(Q_+)$$

und

$$Y = G(Q_-),$$

so gilt

$$X + Y = G(N) + \varepsilon.$$

Für einen gegebenen Wert von X folgt daher

$$Y \in \{G(N) - X - 1, G(N) - X, G(N) - X + 1\}.$$

Der Semiprimfall ist die für die folgenden Banduntersuchungen verwendete Spezialform des Satzes. Die Herleitung des Dreiwertesatzes selbst verwendet jedoch nicht die Primzahleigenschaft von p und q . Sie benötigt lediglich ein nichttriviales komplementäres Idempotentenpaar und die daraus folgenden Quotientenidentitäten. Eine entsprechende Verallgemeinerung wird in Kapitel 9 formuliert.

4.7 Ausschluss der Ausgangsgruppe

Für ein echtes ungerades Semiprim

$$N = pq$$

mit verschiedenen ungeraden Primzahlen $p < q$ kann der größere Quotient Q_+ nicht in derselben KQ-Gruppe wie N liegen.

Zunächst ist festzuhalten, dass in diesem Fall

$$Q_- \geq 2$$

gilt.

Angenommen, es wäre

$$Q_- = 1.$$

Dann müsste für das zugehörige nichttriviale Idempotent e

$$e(e - 1) = N = pq$$

gelten.

Da aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind,

$$\gcd(e, e - 1) = 1,$$

müssten die beiden Primfaktoren p und q vollständig auf e und $e - 1$ verteilt sein. Damit wären p und q zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Zwei verschiedene ungerade Primzahlen können jedoch nicht den Abstand 1 besitzen. Somit ist $Q_- = 1$ ausgeschlossen und es gilt

$$Q_- \geq 2.$$

Daraus folgt auch

$$G(Q_-) \geq 2.$$

Nun sei angenommen,

$$G(Q_+) = G(N).$$

Aus dem Synadron-Dreiwertesatz folgt dann

$$G(Q_-) + G(N) = G(N) + \varepsilon,$$

also

$$G(Q_-) = \varepsilon.$$

Wegen

$$\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$$

wäre damit

$$G(Q_-) \leq 1.$$

Dies widerspricht

$$G(Q_-) \geq 2.$$

Folglich gilt

$$G(Q_+) < G(N).$$

Da die Gruppennummern ganzzahlig sind, folgt

$$G(Q_+) \leq G(N) - 1.$$

Der Ausschluss der Ausgangsgruppe folgt somit allein aus der Synadron-Kopplung und benötigt noch keine Triatrad-Struktur.

Der gerade Semiprimfall $N = 6$ ist hiervon getrennt zu behandeln. Dort kann der kleinere Quotient tatsächlich den Wert 1 annehmen. Die folgenden Triatrad-Banduntersuchungen werden daher für echte ungerade Semiprime formuliert.

4.8 Beispiel $N = 589$

Für

$$N = 589$$

wurden bereits

$$Q_- = 104$$

und

$$Q_+ = 198$$

bestimmt.

Die zugehörigen KQ-Gruppen sind

$$G(104) = 10,$$

$$G(198) = 14$$

und

$$G(589) = 24.$$

Damit gilt

$$10 + 14 = 24.$$

Der Korrekturterm beträgt in diesem Fall

$$\varepsilon = 0.$$

Das Beispiel zeigt zugleich den Ausschluss der Ausgangsgruppe. Der größere Quotient besitzt die Gruppennummer 14, während die Ausgangszahl in Gruppe 24 liegt.

Die bisherige Synadron-Struktur bestimmt jedoch noch nicht, warum die größere Quotientengruppe gerade 14 beträgt. Für eine weitergehende Lokalisierung wird im Folgenden eine unabhängig definierte Struktur herangezogen.

5 Triatrad und KQ-Bänder

5.1 Der Triatrad-Abstieg

Für eine positive natürliche Zahl N sei

$$G(N) = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{4N + 1}}{2} \right\rfloor.$$

Mit

$$m = G(N)$$

wird die Dreieckszahl

$$T_m = \frac{m(m + 1)}{2}$$

gebildet. Der Triatrad-Operator lautet

$$F(N) = N - T_m.$$

Der Operator wird rekursiv angewendet, solange positive Nachfolger entstehen. Für die vorliegende Arbeit wird nicht die vollständige terminale Theorie des Triatrad benötigt, sondern die Folge der KQ-Gruppen, die aus den ersten Abstiegsstufen einer Ausgangszahl entsteht.

Setze

$$N_0 = N,$$

$$N_1 = F(N),$$

$$N_2 = F^2(N),$$

und allgemein

$$N_j = F^j(N),$$

soweit der jeweilige Wert positiv ist.

Die zugehörigen KQ-Gruppen seien

$$G_j = G(N_j).$$

Für hinreichend große Ausgangswerte entsteht dadurch eine absteigende Folge von Gruppenindizes. In kleinen Randfällen können jedoch zwei aufeinanderfolgende Triatradwerte derselben KQ-Gruppe angehören oder ein weiterer positiver Nachfolger

bereits fehlen. Die später verwendete Bandkonstruktion setzt daher voraus, dass die benötigten positiven Nachfolger $N_1, N_2, \dots$ tatsächlich existieren.

Für die zentrale Kreuzrelation werden insbesondere

$$G_0 = G(N),$$

$$G_1 = G(F(N))$$

und

$$G_2 = G(F^2(N))$$

verwendet.

Bei den kleinen echten ungeraden Semiprimen, für die diese Folge degeneriert oder vorzeitig endet, erfolgt die Prüfung separat. Die allgemeinen Bandbeweise betreffen den nichtdegenerierten Bereich mit zwei positiven Triatrad-Nachfolgern.

5.2 Größenreduktion und KQ-Index

Sei

$$m = G(N).$$

Aus der Definition

$$G(N) = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{4N + 1}}{2} \right\rfloor$$

folgt

$$m(m - 1) \leq N < m(m + 1).$$

Damit besitzt jede natürliche Zahl mit KQ-Index m eine eindeutige Darstellung

$$N = m(m - 1) + r$$

mit

$$0 \leq r \leq 2m - 1.$$

Der Wert

$$r = 0$$

entspricht dem unteren N_0 -Pol

$$N = m(m - 1).$$

In der strukturellen KQ-Terminologie wird dieser Wert nicht als reguläres Mitglied der Gruppe behandelt. Die Floor-Abbildung $G(N) = m$ ordnet ihm jedoch denselben

ganzzahligen Index m zu. Für die folgenden algebraischen Rechnungen wird dieser KQ-Index verwendet. Reguläre Gruppenmitglieder besitzen

$$1 \leq r \leq 2m - 1.$$

Der Triatrad-Schritt lautet

$$F(N) = N - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Einsetzen der KQ-Darstellung ergibt

$$F(N) = m(m-1) + r - \frac{m(m+1)}{2},$$

also

$$F(N) = \frac{m(m-3)}{2} + r.$$

Vergleicht man den Nachfolger mit der Hälfte des Ausgangswertes, erhält man

$$F(N) - \frac{N}{2} = \frac{r}{2} - m.$$

Da

$$r \leq 2m - 1$$

gilt,

$$\frac{r}{2} - m \leq -\frac{1}{2}.$$

Somit folgt für jeden positiven Triatrad-Nachfolger strikt

$$F(N) < \frac{N}{2}.$$

Wird ein zweiter positiver Schritt ausgeführt, gilt entsprechend

$$F^2(N) < \frac{N}{4}.$$

Diese Schranke ist unabhängig von der konkreten Lage innerhalb der KQ-Gruppe. Sie bildet die wesentliche Größenrelation für den späteren Vergleich mit dem größeren CRT-Quotienten Q_+ .

5.3 Definition der Triatrad-Bänder

Seien für eine Ausgangszahl N die benötigten positiven Triatrad-Nachfolger definiert und ihre KQ-Gruppen mit

$$G_0, G_1, G_2, \dots$$

bezeichnet.

Für einen strikt fallenden Abschnitt dieser Gruppenfolge werden die dazwischenliegenden Gruppennummern als Triatrad-Bänder bezeichnet.

Band 0 umfasst

$$G_1 < X \leq G_0.$$

Band 1 umfasst

$$G_2 < X \leq G_1.$$

Band 2 umfasst entsprechend

$$G_3 < X \leq G_2.$$

Allgemein gilt für einen nichtdegenerierten Abschnitt

$$G_{j+1} < G_j$$

die Definition

$$G_{j+1} < X \leq G_j.$$

Die Bandgrenzen werden nicht extern gewählt. Sie entstehen aus dem Triatrad-Abstieg derselben Ausgangszahl N .

Für den größeren Synadron-Quotienten ist die obere Randgruppe G_0 bei echten ungeraden Semiprimen bereits durch den Synadron-Dreiwertesatz ausgeschlossen. Innerhalb von Band 0 verbleiben daher nur die Gruppen

$$G_1 + 1, \dots, G_0 - 1.$$

Für die zentrale untere Ausschlussrelation wird ausschließlich die Grenze G_2 benötigt. Kleine Ausgangswerte, bei denen G_2 nicht definiert ist oder mit G_1 zusammenfällt, werden nicht durch die allgemeine Bandformulierung erfasst und sind separat überprüfbar.

5.4 Asymptotische Bandgeometrie

Für große Ausgangswerte reduziert der Triatrad den Zahlenwert in jedem Schritt asymptotisch um den Faktor $1/2$. Da die KQ-Gruppennummer asymptotisch der Quadratwurzel des Zahlenwertes entspricht, folgt für jeden festen Abstiegsindex j

$$G_j \sim \frac{G_0}{2^{j/2}}$$

für $N \rightarrow \infty$.

Insbesondere gilt

$$\frac{G_1}{G_0} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\frac{G_2}{G_0} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Die ersten Gruppenhöhen besitzen damit asymptotisch die Skalierung

$$G_0, \quad \frac{G_0}{\sqrt{2}}, \quad \frac{G_0}{2}, \quad \frac{G_0}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{G_0}{4}, \dots$$

Die Triatrad-Bänder sind daher nicht gleich breit. Ihre relative Lage folgt asymptotisch einer $\sqrt{2}$ -Skalierung.

Diese Darstellung dient ausschließlich der asymptotischen Einordnung. Die späteren Ausschlussaussagen werden mit den exakten ganzzahligen Gruppenwerten G_j bewiesen.

6 Kreuzrelation zwischen Synadron und Triatrad

6.1 Vergleich des größeren Quotienten mit dem zweiten Triatradwert

Für die beiden komplementären Idempotenten gilt

$$e_- + e_+ = N + 1.$$

Da $e_+ > e_-$, folgt

$$e_+ > \frac{N + 1}{2}.$$

Der größere Quotient lautet

$$Q_+ = \frac{e_+(e_+ - 1)}{N}.$$

Schreibt man die Differenz der beiden Idempotenten als

$$D_e = e_+ - e_- > 0,$$

so ist

$$e_+ = \frac{N + 1 + D_e}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$Q_+ = \frac{(N + D_e)^2 - 1}{4N}.$$

Insbesondere gilt

$$Q_+ > \frac{N}{4}.$$

Aus dem zweimaligen Triatrad-Abstieg wurde dagegen bereits

$$F^2(N) < \frac{N}{4}$$

hergeleitet.

Somit gilt für jedes hier betrachtete Semiprim

$$Q_+ > F^2(N).$$

Da die KQ-Gruppenabbildung monoton wächst, folgt unmittelbar

$$G(Q_+) \geq G_2.$$

Der größere CRT-Quotient kann damit nicht unter die Gruppe des zweiten Triatradwertes fallen. Sämtliche Bänder unterhalb von Band 2 sind ausgeschlossen.

Offen bleibt an dieser Stelle ausschließlich, ob Q_+ noch in derselben KQ-Gruppe wie $F^2(N)$ liegen kann. Der Unterschied zwischen

$$G(Q_+) \geq G_2$$

und

$$G(Q_+) > G_2$$

ist daher die einzige verbleibende Frage für einen vollständigen Ausschluss von Band 2.

6.2 Der CRT-Abstandsparameter

Für die weitere Untersuchung wird erneut die Differenz

$$D_e = e_+ - e_-$$

verwendet.

Modulo N gilt

$$D_e \equiv 2e_+ - 1.$$

Wegen der Idempotenz von e_+ folgt

$$(2e_+ - 1)^2 \equiv 1 \pmod{N}.$$

Damit ist

$$D_e^2 \equiv 1 \pmod{N}.$$

Es existiert folglich eine positive ganze Zahl k mit

$$D_e^2 - 1 = kN.$$

Für die im Folgenden betrachteten echten ungeraden Semiprime ist N ungerade. Aus

$$e_- + e_+ = N + 1$$

folgt, dass D_e gerade ist. Damit ist $D_e^2 - 1$ ungerade und folglich auch k ungerade.

Es gilt daher

$$k \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Mit

$$D_e = \sqrt{kN + 1}$$

nimmt der größere Quotient die Form

$$Q_+ = \frac{N + k + 2\sqrt{kN + 1}}{4}$$

an.

Diese Darstellung ermöglicht eine Fallunterscheidung nach dem ganzzahligen CRT-Abstandsparameter k .

6.3 Der Fall $k = 1$

Für

$$k = 1$$

gilt

$$D_e^2 = N + 1.$$

Da D_e gerade ist, sei

$$D_e = 2s.$$

Dann folgt

$$N = 4s^2 - 1.$$

Dies faktorisiert zu

$$N = (2s - 1)(2s + 1).$$

Für den größeren Quotienten ergibt sich

$$Q_+ = \frac{N + 1 + 2D_e}{4}.$$

Damit folgt

$$Q_+ = s(s + 1).$$

Der Wert Q_+ liegt somit exakt auf einer KQ-Rechteckzahl. Seine Gruppennummer ist

$$G(Q_+) = s + 1.$$

Andererseits gilt

$$F^2(N) < \frac{N}{4} = s^2 - \frac{1}{4}.$$

Damit kann $F^2(N)$ die Gruppe $s + 1$ nicht erreichen. Folglich gilt strikt

$$G(Q_+) > G_2.$$

Der Fall $k = 1$ kann Band 2 daher nicht erreichen.

6.4 Die Fälle $k \geq 5$

Sei

$$G_2 = r.$$

Da $F^2(N)$ in Gruppe r liegt, gilt

$$F^2(N) \geq r(r-1).$$

Aus

$$F^2(N) < \frac{N}{4}$$

folgt

$$N > 4r(r-1).$$

Da N ganzzahlig ist,

$$N \geq 4r(r-1) + 1.$$

Für $k \geq 5$ gilt

$$4Q_+ = N + k + 2\sqrt{kN+1}$$

und daher

$$4Q_+ \geq N + 5 + 2\sqrt{5N+1}.$$

Die rechte Seite wächst monoton mit N . Ihr kleinster zulässiger Wert wird deshalb bei

$$N = 4r(r-1) + 1$$

angenommen. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & N + 5 + 2\sqrt{5N+1} \\ & \geq 4r^2 - 4r + 6 + 2\sqrt{20r^2 - 20r + 6}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$20r^2 - 20r + 6 > (4r-3)^2$$

für $r \geq 1$. Daher

$$2\sqrt{20r^2 - 20r + 6} > 8r - 6.$$

Somit folgt

$$4Q_+ > 4r(r+1).$$

Also

$$Q_+ > r(r+1).$$

Der Wert $r(r + 1)$ ist bereits die nächste KQ-Rechteckgrenze oberhalb der Gruppe r .
Damit gilt

$$G(Q_+) \geq r + 1.$$

Folglich

$$G(Q_+) > G_2.$$

Für sämtliche ungeraden Werte

$$k \geq 5$$

ist Band 2 damit ausgeschlossen.

6.5 Der verbleibende Fall $k = 3$

Für echte ungerade Semiprime ist

$$k = \frac{D_e^2 - 1}{N}$$

eine positive ungerade ganze Zahl. Nachdem die Fälle

$$k = 1$$

und

$$k \geq 5$$

bereits behandelt wurden, verbleibt ausschließlich

$$k = 3.$$

Dann gilt

$$D_e^2 - 1 = 3N.$$

Für

$$N = pq$$

mit verschiedenen ungeraden Primzahlen $p < q$ folgt

$$(D_e - 1)(D_e + 1) = 3pq.$$

Da D_e gerade ist, sind $D_e - 1$ und $D_e + 1$ beide ungerade. Außerdem gilt

$$\gcd(D_e - 1, D_e + 1) = \gcd(D_e - 1, 2) = 1.$$

Die beiden Faktoren sind daher teilerfremd und unterscheiden sich exakt um 2.

Zunächst sei

$$p \neq 3.$$

Dann sind $3, p, q$ drei verschiedene Primzahlen. Wegen der Teilerfremdheit müssen sie vollständig auf die beiden Faktoren $D_e - 1$ und $D_e + 1$ verteilt werden. Die Aufteilung $(1) \text{ und } (3pq)$ ist ausgeschlossen, da $(D_e - 1 = 1)$ bereits $(D_e = 2)$ und damit $(D_e + 1 = 3)$ erzwingen würde, im Widerspruch zu $(3pq > 3)$. Bis auf Vertauschung existieren daher nur drei mögliche Zerlegungen:

$$3 \text{ und } pq,$$

$$p \text{ und } 3q,$$

oder

$$q \text{ und } 3p.$$

Die erste Möglichkeit ist ausgeschlossen, da für $p \geq 5$ und $q > p$

$$pq - 3 > 2$$

gilt.

Auch die zweite Möglichkeit ist ausgeschlossen, denn

$$3q - p > 2.$$

Damit können p und $3q$ nicht die beiden ungeraden Faktoren mit Abstand 2 sein.

Es verbleibt die Paarung

$$q \text{ und } 3p.$$

Da die beiden Faktoren den Abstand 2 besitzen, folgt

$$q - 3p = 2$$

oder

$$3p - q = 2.$$

Somit gilt

$$q = 3p + 2$$

oder

$$q = 3p - 2.$$

Für den Sonderfall

$$p = 3$$

lautet die Faktorisierung

$$(D_e - 1)(D_e + 1) = 9q.$$

Da $q > 3$ prim ist, sind 9 und q teilerfremd. Wegen der Teilerfremdheit von $D_e - 1$ und $D_e + 1$ kann die Primzahlpotenz 3^2 nicht auf beide Faktoren verteilt werden.

Formal wäre zunächst auch die Aufteilung

$$1 \quad \text{und} \quad 9q$$

möglich. Sie ist jedoch ausgeschlossen, weil die beiden Faktoren den Abstand 2 besitzen müssten. Aus

$$9q - 1 = 2$$

würde

$$q = \frac{1}{3}$$

folgen.

Damit verbleiben ausschließlich die beiden Faktoren

$$9 \quad \text{und} \quad q.$$

Wegen ihres Abstandes 2 gilt daher

$$q = 7$$

oder

$$q = 11.$$

Auch diese beiden Fälle erfüllen

$$q = 3p - 2$$

beziehungsweise

$$q = 3p + 2.$$

Damit ist für sämtliche echten ungeraden Semiprime im Fall $k = 3$ bewiesen:

$$q = 3p \pm 2.$$

Der verbleibende Randfall wird somit nicht durch ein ungefähres Faktorverhältnis beschrieben, sondern durch zwei exakte arithmetische Familien.

Für

$$q = 3p + 2$$

ergibt sich

$$Q_+ = \frac{(p+1)(3p+5)}{4}.$$

Für

$$q = 3p - 2$$

gilt

$$Q_+ = \frac{(p+1)(3p+1)}{4}.$$

Der kleinste Fall der zweiten Familie ist

$$N = 3 \cdot 7 = 21.$$

Hier lautet der Triatrad-Abstieg

$$21 \mapsto 6 \mapsto 0.$$

Ein positiver zweiter Triatrad-Nachfolger und damit G_2 existiert für diesen Wert nicht.

Die Frage nach einer Lage in Band 2 stellt sich für $N = 21$ daher nicht.

Für diejenigen Semiprime der beiden Familien $q = 3p \pm 2$, für die $F^2(N) > 0$ und damit G_2 definiert ist, bleibt die Frage offen, ob tatsächlich

$$G(Q_+) = G_2$$

auftreten kann oder ob auch dort stets

$$G(Q_+) > G_2$$

gilt.

Für alle echten ungeraden Semiprime außerhalb der beiden Familien

$$q = 3p \pm 2$$

ist Band 2 bereits ausgeschlossen.

6.6 Gegenwärtiger Kreuzsatz

Sei

$$N = pq$$

ein echtes ungerades Semiprim mit verschiedenen Primzahlen $p < q$. Es seien $Q_- < Q_+$ die aus den beiden komplementären nichttrivialen CRT-Idempotenten abgeleiteten Quotienten. Weiter seien zwei positive Triatrad-Nachfolger vorhanden und

$$G_0 = G(N), \quad G_2 = G(F^2(N)).$$

Dann gilt allgemein

$$G(Q_+) \leq G_0 - 1$$

und

$$G(Q_+) \geq G_2.$$

Die erste Schranke folgt aus dem Synadron-Dreiwertesatz. Die zweite folgt aus

$$Q_+ > \frac{N}{4}$$

und

$$F^2(N) < \frac{N}{4}.$$

Für alle Semiprime mit

$$q \neq 3p - 2$$

und

$$q \neq 3p + 2$$

gilt die strengere Schranke

$$G(Q_+) \geq G_2 + 1.$$

Damit liegt der größere Quotient für diese Semiprime ausschließlich in den beiden oberen Triatrad-Bändern:

$$G_1 + 1 \leq G(Q_+) \leq G_0 - 1$$

oder

$$G_2 + 1 \leq G(Q_+) \leq G_1.$$

Nur für die beiden exakten Familien

$$q = 3p \pm 2$$

ist der Grenzfall

$$G(Q_+) = G_2$$

durch den bisherigen Beweis noch nicht allgemein ausgeschlossen.

Die Aussage ist eine strukturelle Lokalisierung und keine Faktorisierungsvorschrift. Sie schließt Teile des durch die Triatrad-Gruppenleiter bestimmten KQ-Raumes aus, ohne damit bereits anzugeben, wie Q_+ innerhalb des verbleibenden Bereiches aus N allein berechnet werden kann.

6.7 Beispiel $N = 589$

Für

$$N = 589 = 19 \cdot 31$$

beginnt der Triatrad-Abstieg mit

$$589 \mapsto 289 \mapsto 136.$$

Die zugehörigen KQ-Gruppennummern lauten

$$G_0 = 24,$$

$$G_1 = 17,$$

$$G_2 = 12.$$

Für den größeren abgeleiteten Quotienten wurde bereits

$$Q_+ = 198$$

und damit

$$G(Q_+) = 14$$

bestimmt.

Somit gilt

$$12 < 14 \leq 17.$$

Der größere Quotient liegt folglich in Band 1.

Der kleinere Quotient besitzt

$$G(Q_-) = 10.$$

Mit

$$G(Q_+) + G(Q_-) = 14 + 10 = 24$$

folgt erneut

$$\varepsilon = 0.$$

Das Beispiel verbindet damit drei zuvor getrennte Beschreibungen derselben Ausgangszahl. Die CRT-Idempotenten erzeugen die Quotienten 104 und 198. Die Synadron-Beziehung koppelt deren KQ-Gruppen 10 und 14. Der unabhängig definierte Triatrad-Abstieg erzeugt die Grenzen 24,17,12,... und lokalisiert die größere Quotientengruppe 14 zwischen der ersten und zweiten dieser Grenzen.

7 Der g_H -Vektor als Kreuzkoordinate

7.1 Verbindung zwischen Parabelverschiebung und Synadron

Die Parabelverschiebung wurde zunächst unabhängig von den CRT-Quotienten entwickelt. Für ein beliebiges Produktpaar beschreibt der g -Vektor die Transformation vom KQ-Referenzpaar zu diesem Produktpaar.

Die Synadron-Struktur erzeugt nun selbst einen Produktkörper

$$H = Q_- Q_+.$$

Wegen der Produktschließung gilt

$$H = C(C + 1).$$

Damit ist das KQ-Referenzpaar von H bereits ganzzahlig. Der allgemeine g -Vektor aus Kapitel 2 kann daher ohne zusätzliche Definition erneut angewendet werden:

$$g_H = \frac{Q_+}{C + 1} = \frac{C}{Q_-}.$$

Die Parabelverschiebung und die Synadron-Struktur treffen sich damit in demselben Transformationsgesetz. Der Index H bezeichnet lediglich den neuen Produktkörper.

7.2 Normierte Lage des größeren Quotienten

Aus

$$g_H = \frac{e_+ - 1}{e_-}$$

und

$$(e_+ - 1) + e_- = N$$

folgt

$$\frac{g_H}{1 + g_H} = \frac{e_+ - 1}{N}.$$

Setze

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}.$$

Für ein echtes ungerades Semiprim unterscheiden sich die beiden komplementären Idempotenten um mindestens 2. Daher gilt

$$e_+ - 1 > e_-.$$

Zusammen mit

$$(e_+ - 1) + e_- = N$$

folgt die exakte Schranke

$$\frac{1}{2} < u < 1.$$

Der Parameter u beschreibt somit die normierte Lage des größeren Idempotenzzweiges innerhalb von N .

Aus

$$e_+ - 1 = Nu$$

folgt

$$e_+ = Nu + 1.$$

Damit ergibt sich für den größeren CRT-Quotienten exakt

$$Q_+ = \frac{e_+(e_+ - 1)}{N} = Nu^2 + u.$$

Wegen

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}$$

gilt daher

$$Q_+ = N \left(\frac{g_H}{1 + g_H} \right)^2 + \frac{g_H}{1 + g_H}.$$

Für wachsendes N und festes beziehungsweise konvergentes u dominiert der quadratische Anteil:

$$Q_+ \sim Nu^2.$$

Da

$$G(X) \sim \sqrt{X}$$

für $X \rightarrow \infty$ gilt, folgt

$$G(Q_+) \sim \sqrt{N} u.$$

Gleichzeitig gilt

$$G(N) \sim \sqrt{N}.$$

Damit erhält man

$$\frac{G(Q_+)}{G(N)} \sim u.$$

Der Parameter

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}$$

besitzt damit neben seiner exakten CRT-Bedeutung auch eine asymptotische Bedeutung als relative KQ-Gruppenhöhe des größeren Quotienten.

7.3 Die asymptotische Grenze zwischen Band 0 und Band 1

Für den ersten Triatrad-Nachfolger gilt asymptotisch

$$\frac{G_1}{G_0} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Gleichzeitig gilt für den größeren Quotienten

$$\frac{G(Q_+)}{G_0} \sim \frac{g_H}{1 + g_H}.$$

Die asymptotische Grenzgleichung zwischen Band 0 und Band 1 lautet daher

$$\frac{g_H}{1 + g_H} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Auflösen nach g_H ergibt

$$g_H = 1 + \sqrt{2}.$$

Der Wert

$$1 + \sqrt{2}$$

ist somit die asymptotische g_H -Grenze zwischen den beiden oberen Triatrad-Bändern. Diese Aussage ist von einer exakten diskreten Klassifikation zu unterscheiden. Die tatsächliche Bandzuordnung erfolgt über die ganzzahligen Größen

$$G(Q_+)$$

und

$$G_1.$$

Für Folgen wachsender Ausgangswerte, deren g_H -Werte einen festen positiven Abstand von

$$1 + \sqrt{2}$$

einhalten, bestimmt die Seite dieser asymptotischen Grenze für hinreichend große Werte auch die Bandseite. Werte mit

$$g_H < 1 + \sqrt{2}$$

liegen asymptotisch unterhalb der ersten Triatrad-Grenze, während Werte mit

$$g_H > 1 + \sqrt{2}$$

asymptotisch oberhalb dieser Grenze liegen.

In einer mit wachsendem N verschwindenden Umgebung der Grenzlage können dagegen die diskreten KQ-Rundungseffekte entscheidend bleiben. Dort ist die exakte Berechnung von

$$G(Q_+)$$

und

$$G_1$$

maßgeblich.

Die Konstante

$$1 + \sqrt{2}$$

ist daher keine universelle exakte Floor-Grenze, sondern die kontinuierliche asymptotische Trennlinie der beiden oberen Triatrad-Bänder in der g_H -Koordinate.

7.4 Exakte und asymptotische Aussagen

Die Verbindung zwischen g_H und den Triatrad-Bändern enthält sowohl exakte als auch asymptotische Bestandteile.

Exakt gilt

$$u = \frac{g_H}{1 + g_H}$$

und

$$Q_+ = Nu^2 + u.$$

Ebenfalls exakt sind die durch den Triatrad erzeugten KQ-Gruppen

$$G_0, G_1, G_2, \dots$$

sowie die daraus bestimmten diskreten Bandgrenzen.

Für einen konkreten Ausgangswert erfolgt die Bandzuordnung deshalb immer durch den Vergleich der ganzzahligen Gruppenindizes.

Asymptotisch gilt dagegen

$$\frac{G(Q_+)}{G_0} \sim u$$

und

$$\frac{G_1}{G_0} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daraus entsteht die kontinuierliche Grenzbedingung

$$g_H = 1 + \sqrt{2}.$$

Die exakte und die asymptotische Beschreibung widersprechen einander nicht. Sie stellen zwei Auflösungsstufen derselben Quotientenlage dar. Die Triatrad-Gruppen liefern die exakte diskrete Position, während g_H eine kontinuierliche Transformationskoordinate liefert, deren Grenzstruktur für große Werte unmittelbar sichtbar wird.

7.5 Rückkehr zum Geradon

Der g_H -Vektor gehört zur allgemeinen Parabelverschiebungstheorie. Daher besitzt auch das Produktpaar

$$Q_- Q_+ = H$$

ein eigenes Geradon.

Da

$$Q_- < Q_+,$$

lautet dieses

$$a_H = Q_+ - Q_-.$$

Aus der bereits bewiesenen Differenzidentität folgt

$$Q_+ - Q_- = e_+ - e_-.$$

Damit gilt

$$a_H = e_+ - e_-.$$

Die Differenz der komplementären CRT-Idempotenten erscheint somit gleichzeitig als Geradon des abgeleiteten Produktpaares (Q_-, Q_+) .

Nach der allgemeinen Geradon- g -Beziehung aus Kapitel 2 gilt außerdem

$$a_H(g_H) = g_H(C + 1) - \frac{C}{g_H}.$$

Die CRT-Struktur erzeugt damit nicht nur einen neuen Produktkörper H , sondern innerhalb der allgemeinen Parabelverschiebung zugleich ein vollständiges Produktpaar mit eigenem Geradon und eigenem g -Vektor.

Diese Rückkehr zur Ausgangstheorie ist wesentlich für den Strukturverbund. Die Parabelverschiebung wird zunächst allgemein und ohne CRT eingeführt. Die CRT-Quotienten erzeugen später selbst ein Objekt, auf das dieselbe Theorie erneut unverändert anwendbar ist.

8 Kreuzrelationen im KQ-Koordinatensystem

8.1 KQ als gemeinsame Koordinatenebene

Die bisher behandelten Konstruktionen besitzen unterschiedliche Ausgangspunkte. Die Parabelverschiebung beginnt mit natürlichen Produktpaaren. Die CRT-Struktur beginnt mit komplementären Idempotenten. Der Triatrad beginnt mit einem rekursiven Dreieckszahlenoperator. Keine dieser Definitionen setzt die jeweils anderen Konstruktionen voraus.

Ihre Kreuzrelationen werden dadurch möglich, dass sämtliche beteiligten Werte auf dieselbe KQ-Koordinate abgebildet werden können.

Für eine positive Zahl X liefert

$$t_q(X) = \frac{1 + \sqrt{4X + 1}}{2}$$

die kontinuierliche KQ-Koordinate und

$$G(X) = \lfloor t_q(X) \rfloor$$

die diskrete Gruppennummer.

Damit können sowohl N , seine natürlichen Produktpaare, die CRT-Quotienten Q_1, Q_2 als auch die Triatrad-Nachfolger $F^j(N)$ innerhalb desselben Koordinatensystems verglichen werden.

KQ stellt in diesem Zusammenhang keine Behauptung auf, dass diese unterschiedlichen Konstruktionen identisch seien. Es ermöglicht vielmehr, Aussagen einer Konstruktion in Koordinaten zu formulieren, die auch für die anderen Konstruktionen definiert sind.

8.2 Die erste Kreuzrelation: Parabelverschiebung und KQ

Die allgemeine Parabelfamilie lautet

$$\mathcal{P}_a(x) = x^2 - ax.$$

Die KQ-Parabel ist darin exakt das Glied

$$a = 1.$$

Sie bildet zugleich die Referenzposition

$$g = 1.$$

Jede natürliche Produktdarstellung von N mit Geraden a kann über ihren g -Vektor auf diese Referenz zurückgeführt werden.

Damit sind Parabelverschiebung und KQ nicht lediglich über eine formale Ähnlichkeit verbunden. KQ ist selbst ein ausgezeichnetes Mitglied der Familie und liefert die Referenzkoordinaten, relativ zu denen die übrigen Produktdarstellungen durch g beschrieben werden.

8.3 Die zweite Kreuzrelation: Synadron und Parabelverschiebung

Aus den komplementären CRT-Idempotenten entstehen die Quotienten Q_- und Q_+ . Ihr Produkt erfüllt

$$Q_- Q_+ = C(C + 1).$$

Damit liegt der abgeleitete Produktkörper H exakt auf der KQ-Referenzparabel.

Die allgemeine Transformation aus der Parabelverschiebung liefert deshalb unmittelbar

$$g_H = \frac{Q_+}{C + 1} = \frac{C}{Q_-}.$$

Gleichzeitig besitzt dieses Produktpaar das Geraden

$$a_H = Q_+ - Q_- = e_+ - e_-.$$

Die ursprünglich unabhängig definierte Parabelverschiebung erscheint damit innerhalb der CRT-abgeleiteten Synadron-Struktur erneut. Weder g_H noch a_H benötigen hierfür eine neue Definition.

8.4 Die dritte Kreuzrelation: Synadron und Triatrad

Der Synadron-Dreiwertesatz liefert für die betrachteten echten ungeraden Semiprime

$$G(Q_-) + G(Q_+) = G_0 + \varepsilon$$

mit

$$\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}.$$

Der Triatrad erzeugt unabhängig davon die Folge der KQ-Indizes

$$G_0, G_1, G_2, \dots,$$

soweit die jeweiligen positiven Nachfolger existieren. In den für die Banddefinition nichtdegenerierten Abschnitten gilt dabei

$$G_{j+1} < G_j.$$

Damit kann die im Synadron zunächst nur relativ zu G_0 bestimmte Quotientengruppe zusätzlich gegenüber den durch den Triatrad erzeugten Grenzen lokalisiert werden.

Für echte ungerade Semiprime mit positivem zweiten Triatrad-Nachfolger gilt allgemein

$$G(Q_+) \leq G_0 - 1$$

und

$$G(Q_+) \geq G_2.$$

Außerhalb der speziellen Semiprimfamilien

$$q = 3p \pm 2$$

verschärft sich die untere Schranke zu

$$G(Q_+) \geq G_2 + 1.$$

Sofern die betreffenden Bandgrenzen strikt verschieden sind, liegt der größere Quotient damit ausschließlich in Band 0 oder Band 1:

$$G_1 < G(Q_+) < G_0$$

oder

$$G_2 < G(Q_+) \leq G_1.$$

In ganzzahliger Form entspricht dies

$$G_1 + 1 \leq G(Q_+) \leq G_0 - 1$$

oder

$$G_2 + 1 \leq G(Q_+) \leq G_1.$$

Bei kleinen degenerierten Triatradfolgen können benachbarte Gruppenindizes zusammenfallen oder ein weiterer positiver Nachfolger fehlen. Diese Randfälle sind von der allgemeinen Banddarstellung zu unterscheiden und werden durch die entsprechenden Einzelwerte behandelt.

Die Bedeutung der Kreuzrelation liegt nicht in der absoluten Zahl der innerhalb eines Bandes verbleibenden KQ-Gruppen. Bei sehr großen Zahlen können auch diese Bereiche weiterhin groß sein. Die Aussage ist eine strukturelle Ausschlussrelation: Mehrere unabhängig definierte Konstruktionen bestimmen gemeinsam, in welchen

Abschnitten der von N erzeugten KQ-Struktur ein CRT-abgeleiteter Wert überhaupt auftreten kann.

8.5 Die vierte Kreuzrelation: g_H und Triatrad-Bänder

Die Verbindung

$$Q_+ = N \left(\frac{g_H}{1 + g_H} \right)^2 + \frac{g_H}{1 + g_H}$$

führt die Bandposition des größeren Quotienten unmittelbar auf g_H zurück.

Der Triatrad beschreibt die Lage durch diskrete Grenzen

$$G_1, G_2, \dots,$$

während g_H dieselbe Lage kontinuierlich parametrisiert. Asymptotisch ergibt sich insbesondere die Grenze

$$g_H = 1 + \sqrt{2}$$

zwischen den beiden oberen Bändern.

Damit entsteht eine direkte Verbindung zwischen einer Produkttransformation und einer rekursiven Abstiegsstruktur. Der g -Vektor wurde weder aus dem Triatrad abgeleitet noch für diesen Zweck definiert. Ebenso wurde der Triatrad nicht aus der Parabelverschiebung konstruiert. Ihre Beziehung entsteht erst durch die gemeinsame KQ-Koordinate.

9 Verallgemeinerung und Grenzen

9.1 Synadron-Struktur über den Semiprimfall hinaus

Die grundlegende Synadron-Struktur setzt nicht voraus, dass N aus genau zwei Primfaktoren besteht.

Sei N eine positive zusammengesetzte Zahl mit einem nichttrivialen Idempotenten e_1 modulo N . Der komplementäre nichttriviale Idempotent sei e_2 , jeweils in positiver Standardrepräsentation. Dann gilt

$$e_1 + e_2 = N + 1.$$

Für

$$Q_i = \frac{e_i(e_i - 1)}{N}$$

sind Q_1, Q_2 positive ganze Zahlen.

Weiter sei

$$C = \frac{(e_1 - 1)(e_2 - 1)}{N}.$$

Dann gelten unabhängig von einer Semiprimvoraussetzung die Identitäten

$$Q_1 Q_2 = C(C + 1)$$

und

$$Q_1 + Q_2 = N - 1 - 2C.$$

Damit folgt ebenfalls

$$N = Q_1 + Q_2 + \sqrt{4Q_1 Q_2 + 1}.$$

Auch der kontinuierliche Synadron-Satz verwendet in seiner Herleitung keine Primzahleigenschaft der zugrunde liegenden Faktorblöcke. Daher gilt für jedes solche nichttriviale komplementäre Idempotentenpaar

$$\frac{1}{2} < t_q(Q_1) + t_q(Q_2) - t_q(N) < 1.$$

Nach dem Übergang zu den ganzzahligen KQ-Indizes folgt ebenfalls

$$G(Q_1) + G(Q_2) = G(N) + \varepsilon$$

mit

$$\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}.$$

Der Synadron-Dreiwertesatz ist damit nicht auf echte Semiprime beschränkt.

Auch der Produktkörper

$$H = Q_- Q_+ = C(C + 1)$$

und sein g -Vektor bleiben erhalten:

$$g_H = \frac{Q_+}{C + 1} = \frac{C}{Q_-}.$$

Schreibt man

$$g_H = \frac{A}{B}$$

vollständig gekürzt, so gilt weiterhin

$$N = d(A + B),$$

wobei

$$d = \gcd(e_-, N).$$

Damit sind d und $A + B$ zwei komplementäre Faktorblöcke von N .

Im echten Semiprimfall müssen diese Faktorblöcke gerade den beiden Primfaktoren p und q entsprechen. Bei Zahlen mit mehreren verschiedenen Primfaktorblöcken können sie dagegen selbst zusammengesetzt sein.

Die Semiprimvoraussetzung wird daher nicht für die grundlegende Synadron-Schließung und den Dreiwertesatz benötigt. Sie wird insbesondere dort wesentlich, wo die komplementären Faktorblöcke eindeutig als zwei Primfaktoren interpretiert oder im Bandbeweis auf die speziellen Familien

$$q = 3p \pm 2$$

zurückgeführt werden.

9.2 Keine Faktorisierungsaussage

Aus den vorangehenden Beziehungen folgt kein Verfahren, das aus einer gegebenen Zahl N unmittelbar einen unbekannten Faktor berechnet.

Insbesondere setzt die Konstruktion von g_H bereits die zugehörige CRT-Quotientenstruktur voraus. Dass die vollständig gekürzte Darstellung von g_H einen Faktorblock von N sichtbar macht, bedeutet daher nicht, dass dieser Faktorblock aus N allein effizient zugänglich ist.

Ebenso ist die Einschränkung von Q_+ auf Triatrad-Bänder keine Faktorisierungsmethode. Sie bestimmt einen zulässigen strukturellen Bereich, nicht unmittelbar einen Faktor.

Die Trennung zwischen struktureller Lokalisierung und algorithmischer Faktorisierung ist für die Interpretation der Ergebnisse wesentlich.

9.3 Der offene $k = 3$ -Randfall

Für den vollständigen Band-2-Ausschluss bleibt eine exakt begrenzte Restfrage offen. Sie betrifft ausschließlich

$$k = 3$$

und damit im echten ungeraden Semiprimfall die beiden Familien

$$q = 3p - 2$$

und

$$q = 3p + 2.$$

Für sämtliche Semiprime außerhalb dieser beiden Familien wurde bereits

$$G(Q_+) > G_2$$

bewiesen, sofern ein positiver zweiter Triatrad-Nachfolger und damit G_2 existiert.

Innerhalb der beiden Familien ist zunächst der kleinste Fall

$$N = 21 = 3 \cdot 7$$

gesondert zu betrachten. Hier gilt

$$21 \mapsto 6 \mapsto 0.$$

Damit existiert kein positiver zweiter Triatrad-Nachfolger. Der Index G_2 und somit auch die Frage einer Zugehörigkeit zu Band 2 sind für diesen Wert nicht definiert.

Für alle übrigen Mitglieder der Familien $q = 3p \pm 2$, für die

$$F^2(N) > 0$$

gilt, bleibt zu klären, ob die Gleichheit

$$G(Q_+) = G_2$$

tatsächlich auftreten kann oder ob auch hier stets

$$G(Q_+) > G_2$$

gilt.

Ein Beweis des strikten Ausschlusses für diese verbleibenden Fälle würde den Band-2-Ausschluss auf sämtliche echten ungeraden Semiprime erweitern, für die die zweite positive Triadradstufe und damit Band 2 definiert ist.

Ein tatsächlicher Gleichheitsfall würde dagegen die Familien

$$q = 3p \pm 2$$

als exakt charakterisierte Ausnahme des strikten Band-2-Ausschlusses auszeichnen.

9.4 Weitere Forschungsfragen

Die vorliegenden Kreuzrelationen führen zu mehreren offenen Fragen.

Für die Semiprimstruktur bleibt zunächst der exakt eingegrenzte Fall

$$q = 3p \pm 2$$

zu schließen. Zu klären ist, ob dort

$$G(Q_+) = G_2$$

tatsächlich auftreten kann oder ob Band 2 auch in diesen beiden Familien vollständig ausgeschlossen ist.

Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob sich die diskrete Bandlage des größeren Quotienten unmittelbar über g_H charakterisieren lässt. Die asymptotische Grenze

$$g_H = 1 + \sqrt{2}$$

ist bekannt, eine exakte ganzzahlige Bedingung für den Übergang zwischen Band 0 und Band 1 ist damit jedoch noch nicht gegeben.

Für allgemein zusammengesetzte Zahlen ist der Synadron-Dreiwertesatz bereits durch dieselbe Herleitung gesichert. Offen bleibt dagegen, wie sich die weitergehende Triadrad-Bandstruktur bei mehreren möglichen nichttrivialen komplementären Idempotentenpaaren verhält. Eine solche Zahl kann mehrere unterschiedliche CRT-Faktorzerlegungen und damit mehrere Synadronpaare besitzen.

Schließlich bleibt zu untersuchen, ob Geradon, g -Vektor, KQ-Koordinaten und Triadrad-Daten eines gegebenen N weitere exakte Einschränkungen eines unbekannten natürlichen Produktpaares liefern können, die über die hier bewiesenen Kreuzrelationen hinausgehen.

10 Schlussbetrachtung

Die Arbeit verbindet eine allgemeine Parabelverschiebung natürlicher Produktpaare mit der KQ-Referenzparabel, dem Geradon und dem g -Vektor. Für komplementäre CRT-Idempotenten entstehen daraus abgeleitete Quotienten mit einer eigenen gekoppelten Struktur, dem Synadron. Ihr Produkt liegt erneut exakt auf einer KQ-Rechteckposition, sodass derselbe allgemeine g -Vektor als g_H wieder auftritt. Der unabhängig definierte Triatrad-Abstieg liefert schließlich KQ-Bänder, durch die sich die mögliche Lage des größeren Quotienten weitgehend einschränken lässt.

Die Parabelverschiebung ersetzt dabei die symmetrische Faktordarstellung $N = pq$ durch

$$N = q^2 - aq,$$

wobei der kleinere Faktor durch die Verschiebungsordinate $a = q - p$ eliminiert und bei Bedarf rekonstruiert wird. Dies führt über die Ergebnisse dieser Arbeit hinaus zu einer offenen methodischen Frage: Ist bei der Untersuchung von Faktorisierungsproblemen die traditionelle gleichberechtigte Betrachtung zweier unbekannter Faktoren stets die günstigste Koordinatenwahl, oder wurde möglicherweise zu lange an einer Stelle gesucht, an der die geometrische Struktur der Produktfamilie nur unvollständig sichtbar wird?

Die vorliegende Arbeit beantwortet diese Frage nicht. Sie zeigt jedoch, dass die geometrisch motivierte Neuausrichtung über Parabelverschiebung, KQ und g -Vektor nicht isoliert bleibt, sondern in unabhängig entstandenen CRT- und Triatrad-Strukturen erneut wirksam wird.