

Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen

Eine Vierbaumzerlegung und das offene Problem der terminalen Klassenzuordnung

Version 1:

Datum Veröffentlichung: 26.07.2026

Achim Meißner

Email:

service@ameis-web.de

Abstract

In dieser Arbeit wird ein deterministischer rekursiver Abstieg auf den positiven natürlichen Zahlen untersucht. Jedem aktuellen Wert N wird zunächst ein eindeutig bestimmter ganzzahliger Index

$$t(N) = \left\lfloor \frac{\sqrt{4N+1} + 1}{2} \right\rfloor$$

zugeordnet. Anschließend wird die durch diesen Index bestimmte Dreieckszahl

$$T_{t(N)} = \frac{t(N)(t(N) + 1)}{2}$$

von N subtrahiert. Der daraus entstehende Abstiegsoperator lautet

$$F(N) = N - T_{t(N)}.$$

Der Operator wird rekursiv angewendet, solange sein Ergebnis positiv bleibt. Es wird gezeigt, dass jeder positive natürliche Ausgangswert nach endlich vielen Schritten genau einen der vier terminalen Werte

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}$$

erreicht. Diese vollständige terminale Vierermenge wird als kanonisches Triatrad bezeichnet. Der zugehörige Endwert $E(N)$ zerlegt die positiven natürlichen Zahlen eindeutig in vier disjunkte Klassen

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6,$$

wobei

$$\mathcal{C}_e = \{N \in \mathbb{N}_{>0} : E(N) = e\}$$

für jedes $e \in \mathcal{T}$ gilt. Da jeder nichtterminale Wert genau einen Nachfolger besitzt, ein Wert jedoch mehrere Vorgänger haben kann, bilden die vier Klassen vier gerichtete Rückwärtsbäume mit den Wurzeln 1, 2, 3 und 6.

Neben der formalen Herleitung des Operators, dem Beweis seiner Endlichkeit und dem Nachweis der vollständigen terminalen Menge untersucht die Arbeit die empirische Struktur der vier Klassen. Hierzu werden umfangreiche numerische Testreihen bis in große Zahlenbereiche ausgewertet. Im Mittelpunkt stehen die globalen Klassengewichte, ihre lokale Veränderung, das Auftreten langer klassenfreier Intervalle sowie die Frage, ob die vier Bäume asymptotisch stabile oder strukturell wechselnde Verteilungen besitzen.

Während die terminale Menge und die Vierbaumzerlegung aus dem Operator folgen, bleibt die direkte Klassenzuordnung eines beliebigen Ausgangswertes offen. Bislang ist der Endwert nur durch Ausführung des Abstiegs bestimmbar. Die zentrale weiterführende Frage lautet daher, welche intrinsische arithmetische Eigenschaft eines natürlichen Wertes N festlegt, ob er der Klasse $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ oder $\mathcal{C}_6$ angehört. Der mathematische Kern besteht damit aus einem elementaren Operator, einer universellen terminalen Vierermenge, einer vollständigen Vierbaumzerlegung und einem offenen direkten Klassifikationsproblem.

Schlüsselwörter / Keywords

Triatrad; natürliche Zahlen; Dreieckszahlen; rekursiver Abstieg; terminale Endwerte; Endwertfunktion; Vierbaumzerlegung; diskrete Dynamik; Klassenverteilung; Voids; direkte Klassenzuordnung; Arithmetic Dynamics; Collatz-Like systems; Bit-level reduction; Basins of Attraction; Partition of Natural Numbers

Vorwort

Das kanonische Triatrad wurde nicht durch die gezielte Suche nach einer Zerlegung der natürlichen Zahlen in vier Klassen gefunden. Sein Ursprung liegt in der Untersuchung von Abstiegsbewegungen innerhalb der zuvor entwickelten KQ- und KFS-Strukturen. In diesem Zusammenhang trat wiederholt die Endwertmenge

$$\{1,2,3,6\}$$

auf. Erst die spätere algebraische Vereinfachung des verwendeten Abstiegs zeigte, dass der zugrunde liegende Prozess unabhängig von KQ und KFS als elementare rekursive Subtraktion eindeutig bestimmter Dreieckszahlen formuliert werden kann.

Diese Trennung ist für die vorliegende Arbeit wesentlich. Die Entdeckungsgeschichte des Triatrad ist mit KQ und KFS verbunden, der mathematische Hauptgegenstand benötigt diese Systeme jedoch nicht. Der Operator, seine Endlichkeit, die vollständige terminale Menge und die daraus folgende Vierbaumzerlegung lassen sich ausschließlich mit klassischen ganzzahligen Funktionen, Dreieckszahlen und elementaren Ungleichungen beschreiben. Die KQ- und KFS-Perspektive wird deshalb erst nach der eigenständigen mathematischen Darstellung des Triatrad behandelt.

Die Bezeichnung Triatrad verbindet den dreieckszahlenbezogenen Ursprung des Operators mit der aus vier Elementen bestehenden terminalen Menge. Formal bezeichnet das Triatrad ausschließlich die Menge

$$\mathcal{T} := \{1,2,3,6\}.$$

Darüber hinaus umfasst der Forschungsgegenstand jedoch die gesamte durch den Operator erzeugte Struktur aus Endwertfunktion, vier Klassen und vier gerichteten Bäumen. Das Triatrad ist daher nicht nur eine auffällige Vierermenge, sondern das gemeinsame terminale Wurzelsystem einer rekursiven Dynamik auf den positiven natürlichen Zahlen.

Die vorliegende Arbeit unterscheidet konsequent zwischen bewiesenen Aussagen, numerischen Befunden und offenen Strukturfragen. Bewiesen werden die Endlichkeit des Abstiegs, die Vollständigkeit der terminalen Menge und die daraus folgende eindeutige Vierbaumzerlegung. Empirisch untersucht werden insbesondere die Häufigkeiten und lokalen Verteilungen der vier Klassen. Offen bleibt, warum ein konkreter Wert N gerade einem bestimmten Triatrad-Endwert zugeordnet ist und ob diese Zuordnung durch eine direkte arithmetische Regel beschrieben werden kann.

Das zugrunde liegende KQ-KFS-Paper wird für die Lektüre dieses Textes als bekannt vorausgesetzt (Meißner, 2025b).

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass das Konzept der Monoinformation bereits eine erste konkrete Anwendung der KQ- und KFS-Prinzipien beschreibt und deren informationstheoretisches Potenzial auslotet (Meißner, 2025c).

Das Paper „Geometrien des Faktorisierungsproblems Ein analytischer Zugang über KQ-Gruppen_Version 3“ gehört ebenfalls zu einer fortlaufenden Analysebetrachtung (Meißner, 2025a).

Inhalt

1. Einleitung.....	11
1.1 Gegenstand der Arbeit.....	11
1.2 Zielsetzung.....	11
1.3 Mathematischer Status der Aussagen	12
1.4 Aufbau der Arbeit	13
2. Arithmetische Grundlagen	14
2.1 Dreieckszahlen	14
2.2 Der Index $t(N)$	14
2.3 Position innerhalb eines Intervalls.....	15
2.4 Eindeutigkeit der Intervallzuordnung	15
3. Der rekursive Dreieckszahlenabstieg	16
3.1 Definition des Abstiegsoperators	16
3.2 Rekursive Abstiegsfolge.....	16
3.3 Darstellung des Operators über die Intervallposition	17
3.4 Größenreduktion eines Abstiegs.....	18
3.5 Beispiel eines vollständigen Abstiegs	19
3.6 Weitere kleine Beispiele.....	20
4. Endlichkeit und Eindeutigkeit des Abstiegs	22
4.1 Strenge Monotonie.....	22
4.2 Endlichkeit.....	22
4.3 Ausschluss von Zyklen.....	22
4.4 Eindeutigkeit des Abstiegsweges.....	23
4.5 Satz über Existenz und Eindeutigkeit.....	24
5. Das kanonische Triatrad.....	25
5.1 Terminale Werte	25
5.2 Schranke für den terminalen Index	25
5.3 Terminale Werte für $m = 1$	26
5.4 Terminale Werte für $m = 2$	26
5.5 Terminale Werte für $m = 3$	27
5.6 Ausschluss weiterer terminaler Werte.....	28
5.7 Definition des Triatrad	28
5.8 Kanonischer Triatrad-Satz	28
5.9 Bedeutung des Satzes	29

6. Die Endwertfunktion und die vier Triatrad-Klassen.....	31
6.1 Definition der Endwertfunktion	31
6.2 Definition der Triatrad-Klassen.....	31
6.3 Disjunktheit der Klassen.....	32
6.4 Vollständigkeit der Klassenzerlegung	32
6.5 Vierklassen-Satz	33
6.6 Erste Elemente der vier Klassen	33
6.7 Rekursive Dreieckszahlenzerlegung	33
6.8 Invarianz entlang zusammenlaufender Wege	34
7. Die Vierbaumzerlegung	36
7.1 Gerichteter Abstiegsgraph	36
7.2 Die vier Wurzeln.....	36
7.3 Baumstruktur einer Triatrad-Klasse	37
7.4 Vorgänger eines Knotens.....	37
7.5 Vorgängerformel	38
7.6 Endlichkeit der unmittelbaren Vorgängermenge	39
7.7 Beispiel einer Rückwärtskonstruktion.....	39
7.8 Verschmelzung von Abstiegswegen	40
7.9 Unendlichkeit der vier Bäume	41
7.10 Vierbaum-Satz	41
7.11 Der Triatrad-Wald.....	41
8. Das Problem der direkten Klassenzuordnung	43
8.1 Rekursive Bestimmbarkeit	43
8.2 Direkte Bestimmung.....	43
8.3 Abgrenzung zweier Fragen	43
8.4 Gesuchte Klasseninvariante	44
8.5 Rekursives Abstiegswort als vollständige Codierung	44
8.6 Die Rolle diskreter Abweichungen	45
8.7 Direkte Klassenzuordnung als eigenständiges Forschungsproblem	46
8.8 Verhältnis zwischen Beweis und Empirie.....	47
8.9 Übergang zur numerischen Untersuchung.....	48
9. Methodik der numerischen Untersuchung	49
9.1 Zielsetzung der Haupttestreihe	49
9.2 Ganzzahlige Berechnung des Abstiegs	49

9.3 Kompakte Endwertcodierung	50
9.4 Chunkstruktur der Datenbank	51
9.5 Fortsetzbarkeit des Berechnungslaufs	51
9.6 Metadaten	52
9.7 Trennung von Rohdaten und Analyse	52
9.8 Validierung der Datenbank.....	53
9.9 Vollständige Neuzählung	53
9.10 Direkte mathematische Stichprobenprüfung	54
10. Globale Verteilung der Triatrad-Klassen.....	55
10.1 Absolute Klassenhäufigkeiten	55
10.2 Relative Klassenanteile.....	55
10.3 Vergleich mit einer einfachen Referenzverteilung	56
10.4 Zusammengefasste Haupt- und Nebenklassen	57
10.5 Globale Stabilität und lokale Veränderlichkeit	57
11. Reihenfolge und Nachbarschaft der Endwerte	59
11.1 Die Endwertfolge.....	59
11.2 Gerichtete Übergänge.....	59
11.3 Funktionelle Unterschiede der vier Klassen	60
11.4 Folgen gleicher Endwerte	60
11.5 Kurze Klassenwörter	61
11.6 Bedeutung der Reihenfolgenanalyse	62
12. Die 6-Voids	63
12.1 Definition eines Klassenvoids	63
12.2 Voids als Strukturmaß.....	64
12.3 Erster großräumiger 6-Void.....	64
12.4 Die zehn größten 6-Voids	65
12.5 Annähernde Verdopplungsleiter	66
12.6 Wachstum der Void-Längen.....	67
12.7 Abgrenzung von Häufigkeit und Void-Geometrie	68
12.8 Vergleich mit den übrigen Triatrad-Klassen	68
12.9 Voids als deterministische Ausschlussbereiche	69
13. Verteilungsregime der großen 6-Voids	71
13.1 Der Void als mehr als eine Nullzone	71
13.2 Verteilung außerhalb der großen 6-Voids	71

13.3 Verteilung innerhalb der großen 6-Voids.....	72
13.4 Die Vorzone	73
13.5 Die Nachzone	74
13.6 Asymmetrie von Eintritt und Austritt	74
13.7 Regionale Verteilungsübersicht	75
13.8 Umverteilung der fehlenden Klasse 6	76
13.9 Übergangsstruktur innerhalb der Void-Regime	77
13.10 Der Void als eigenständiges Verteilungsregime.....	78
14. Vertiefende Analyse der Klassenwörter.....	79
14.1 Konzentration der Dreiermuster	79
14.2 Zwei dominante Grundschleifen.....	79
14.3 Seltene Dreiermuster	80
14.4 Wiederholungsmuster	81
14.5 Maximale Lauflängen	82
14.6 Vierermuster und verbotene Folgen.....	83
14.7 Häufigste Vierermuster	83
14.8 Lokale Übergangsgrammatik	84
15. Veränderung der Übergangsgrammatik in den 6-Voids.....	86
15.1 Bedingte Übergangsanalyse	86
15.2 Ausbildung der Bindung $1 \leftrightarrow 3$	86
15.3 Umlenkung der Klasse 2.....	87
15.4 Ersatz des 6-Zweiges.....	88
15.5 Vorboten des Regimewechsels.....	89
15.6 Rückkehr nach dem Void	89
15.7 Regimebild der Übergänge	90
16. Referenzmodell einer unabhängigen Klassenfolge	92
16.1 Zweck des Vergleichs	92
16.2 Abweichung der Übergänge.....	92
16.3 Erwartete Void-Größe im unabhängigen Modell	93
16.4 Häufigkeit als unzureichende Erklärung.....	94
17. Empirische Folgerungen für das Klassifikationsproblem	95
17.1 Mehr als eine globale Häufigkeitsverteilung	95
17.2 Anforderungen an eine direkte Endwertregel.....	95
17.3 Hinweis auf eine verborgene Klassenarithmetik	96

17.4 Grenzen der empirischen Aussage	97
17.5 Bereitstellung der Auswertungsdaten.....	97
18. Abschluss der empirischen Untersuchung.....	98
19. Entdeckung des Triatrad in KQ.....	100
19.1 Historischer Ausgangspunkt	100
19.2 Von drei beobachteten Endwerten zur Vierermenge	101
19.3 Die Suche nach dem vierten Endwert	101
19.4 Rückwärtsdarstellung des gefundenen Weges	103
19.5 Verhältnis zwischen KQ-Vorhersage und Triatrad-Satz	103
19.6 KQ und KFS als geometrischer Entdeckungsraum	104
19.7 Keine zweite Beweisführung	105
19.8 Beobachtete Abstiegsdauer großer Werte	105
19.9 Theoretische Erklärung der Größenordnung.....	106
19.10 Exakte Abweichung von der Halbierung	107
19.11 Hypothese des näherungsweisen Bitverlustes.....	108
19.12 Informationsreduktion.....	109
19.13 Offene Fragen zur Abstiegsdauer	110
19.14 Bedeutung der Hypothese für die Triatrad-Forschung	111
20. Weiterführende Strukturfragen	113
20.1 Direkte Bestimmung des Endwertes	113
20.2 Struktur der Korrekturfolge	113
20.3 Symbolische Wegcodierung.....	114
20.4 Rückwärtsbäume als Klassifikationsobjekte.....	114
20.5 Erklärung der 6-Voids	115
20.6 Globale Verteilungsgesetze	115
20.7 Verbotene Muster.....	116
20.8 Zukünftige Untersuchungen	116
21. Schlussbetrachtung	118
21.1 Gesicherte mathematische Ergebnisse.....	118
21.2 Rekursion und direkte Klassifikation	119
21.3 Ergebnisse der numerischen Hauptuntersuchung	120
21.4 Lokale Ordnung der Endwertfolge	120
21.5 Die Sonderstellung der Klassen 3 und 6	121
21.6 Die 6-Voids als stärkster großräumiger Befund	122

21.7 Voids als eigenständige Verteilungsregime	123
21.8 Veränderung der Übergangsgrammatik in den Voids	123
21.9 Bedeutung der empirischen Ergebnisse	124
21.10 Entdeckungsgeschichte in KQ	125
21.11 Hypothese zur Abstiegsdauer	125
21.12 Größeninformation und terminale Klasseninformation	126
21.13 Offene Hauptprobleme	127
21.14 Grenzen der vorliegenden Untersuchung	127
21.15 Wissenschaftliche Einordnung	128
21.16 Abschließende Bewertung	128
Lizenzhinweis zur Nutzung dieses Dokuments.....	130
Literaturverzeichnis	131

1. Einleitung

1.1 Gegenstand der Arbeit

Die Menge der positiven natürlichen Zahlen kann durch eine einfache rekursive Operation in vier disjunkte terminale Klassen zerlegt werden. Ausgangspunkt ist eine Ganzzahlfunktion $t(N)$, die jedem positiven natürlichen Wert N einen Index zuordnet. Dieser Index bestimmt eine Dreieckszahl, die im nächsten Schritt von N subtrahiert wird. Die Operation wird mit dem jeweils neu entstandenen positiven Wert wiederholt. Obwohl jeder einzelne Schritt ausschließlich aus einer ganzzahligen Indexbestimmung und einer Dreieckszahlensubtraktion besteht, besitzt der vollständige Prozess eine auffällige globale Eigenschaft: Jeder positive natürliche Ausgangswert erreicht nach endlich vielen Schritten genau einen der vier Werte

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6.$$

Andere positive Endwerte sind nicht möglich. Die vier Werte bilden gemeinsam das kanonische Triatrad

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Der jeweils erreichte Endwert definiert eine Funktion

$$E: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Damit wird jeder positive natürliche Wert eindeutig einer der vier Klassen

$$\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \quad \mathcal{C}_6$$

zugeordnet. Da der Abstieg deterministisch ist, besitzt jeder nichtterminale Wert genau einen Nachfolger. Umgekehrt können mehrere größere Werte auf denselben Nachfolger absteigen. Die vier Klassen besitzen deshalb nicht nur die Form gewöhnlicher Mengen, sondern bilden vier verzweigte gerichtete Rückwärtsbäume mit den Wurzeln 1, 2, 3 und 6. Die daraus entstehende Struktur wird in dieser Arbeit als Vierbaumzerlegung der positiven natürlichen Zahlen bezeichnet.

1.2 Zielsetzung

Das erste Ziel der Arbeit besteht in der vollständigen formalen Definition des rekursiven Dreieckszahlenabstiegs. Anschließend werden seine Endlichkeit und die

Eindeutigkeit des zu jedem Ausgangswert gehörenden terminalen Endwertes gezeigt. Darauf aufbauend wird bewiesen, dass die Menge $\{1,2,3,6\}$ sämtliche möglichen positiven Terminalwerte enthält.

Das zweite Ziel besteht in der Beschreibung der durch die Endwertfunktion entstehenden Vierbaumzerlegung. Hierzu werden die vier Klassen definiert, ihre Disjunktheit und Vollständigkeit gezeigt und die Bedingungen untersucht, unter denen ein Wert als Vorgänger eines bereits gegebenen Baumknotens auftreten kann.

Das dritte Ziel ist die empirische Untersuchung der vier Klassen in großen Zahlenbereichen. Die numerischen Daten sollen nicht lediglich bestätigen, dass alle berechneten Abstiege in einem Wert des Triatrad enden. Untersucht werden vielmehr die relativen Gewichte der vier Klassen, ihre Entwicklung mit wachsendem N , lokale Veränderungen der Verteilung und ausgedehnte Intervalle, in denen eine bestimmte Klasse vollständig fehlt. Solche klassenfreien Intervalle werden als Triatrad-Voids bezeichnet.

Das vierte Ziel besteht in der präzisen Formulierung des noch ungelösten direkten Klassifikationsproblems. Der Wert $E(N)$ ist durch rekursive Anwendung des Operators eindeutig berechenbar. Bislang ist jedoch keine geschlossene Regel bekannt, die den Endwert unmittelbar aus N oder aus einer anderen einfachen arithmetischen Eigenschaft bestimmt. Die Frage

Welche intrinsische Eigenschaft von N bestimmt $E(N)$?

bildet deshalb den zentralen offenen Problemkomplex dieser Arbeit.

1.3 Mathematischer Status der Aussagen

Die Arbeit trennt drei Erkenntnisebenen. Zur ersten Ebene gehören die aus der Definition des Operators folgenden mathematischen Aussagen. Dazu zählen die Eindeutigkeit jedes Abstiegsweges, seine Endlichkeit, die vollständige terminale Menge und die Vierbaumzerlegung.

Zur zweiten Ebene gehören numerische Ergebnisse. Hierzu zählen die gemessenen Häufigkeiten der vier Klassen, ihre lokalen Verteilungen, die beobachteten Void-Strukturen und die anhand ausgewählter Testwerte untersuchte Abstiegsdauer. Diese Aussagen gelten zunächst für die jeweils ausdrücklich angegebenen Testbereiche.

Zur dritten Ebene gehören offene Hypothesen und weiterführende Strukturfragen. Hierzu zählen mögliche direkte Klasseninvarianten, asymptotische Verteilungsregeln, die Frage nach unbeschränkt wachsenden Voids und mögliche geometrische Interpretationen der vier Bäume. Solche Überlegungen werden nicht als Folgerungen des Triatrad-Satzes behandelt, sondern ausdrücklich als Forschungsfragen gekennzeichnet.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die Kapitel 2 bis 7 entwickeln den mathematischen Kern unabhängig von KQ und KFS. Nach den arithmetischen Grundlagen wird der Abstiegsoperator definiert. Anschließend werden Endlichkeit, terminale Menge, Endwertfunktion und Vierbaumzerlegung hergeleitet.

Die Kapitel 8 bis 18 behandeln das direkte Klassifikationsproblem und die numerischen Untersuchungen. Der statistische Teil umfasst globale und lokale Klassengewichte, insbesondere auffällige sogenannte 6-Voids u.a. sowie ergänzende Beobachtungen zur Abstiegsdauer.

Kapitel 19 beschreibt die Entdeckungsgeschichte innerhalb von KQ und KFS und zeigt, wie der Operator von diesen ursprünglichen Darstellungen gelöst und klassisch formuliert werden kann und weitergehende Strukturfragen. Die abschließenden Kapitel behandeln weiterführende Strukturfragen, offene Probleme und die Bedeutung des Triatrad als Gegenstand einer diskreten Dynamik auf den positiven natürlichen Zahlen.

2. Arithmetische Grundlagen

2.1 Dreieckszahlen

Für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ ist die m -te Dreieckszahl definiert durch

$$T_m = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Die ersten Dreieckszahlen lauten

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6, \quad T_4 = 10, \quad T_5 = 15.$$

Im rekursiven Dreieckszahlenabstieg wird nicht stets dieselbe Dreieckszahl verwendet. Der Index m wird in jedem Schritt aus dem aktuellen Wert neu bestimmt. Dadurch entsteht ein adaptiver Operator, dessen Subtraktionsgröße mit dem Ausgangswert des jeweiligen Schrittes gekoppelt ist.

2.2 Der Index $t(N)$

Für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ wird

$$t(N) = \left\lfloor \frac{\sqrt{4N+1} + 1}{2} \right\rfloor$$

definiert.

Der Wert $t(N)$ ist die eindeutig bestimmte positive ganze Zahl m , für die

$$m(m-1) \leq N < m(m+1)$$

gilt. Gleichwertig kann das Intervall einschließlich ganzzahliger Grenzen geschrieben werden als

$$m(m-1) \leq N \leq m(m+1) - 1.$$

Die positiven natürlichen Zahlen werden dadurch in aufeinanderfolgende Intervalle zerlegt. Für die ersten Werte von m erhält man

$$m = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq N \leq 1,$$

$$m = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq N \leq 5,$$

$$m = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \leq N \leq 11,$$

$$m = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 12 \leq N \leq 19.$$

Innerhalb jedes dieser Intervalle besitzt $t(N)$ einen konstanten Wert. Folglich wird für sämtliche Werte desselben Intervalls dieselbe Dreieckszahl T_m verwendet.

2.3 Position innerhalb eines Intervalls

Sei $m = t(N)$. Dann besitzt jedes N im zugehörigen Intervall eine eindeutige Darstellung

$$N = m(m - 1) + r$$

mit

$$0 \leq r \leq 2m - 1.$$

Der Wert r bezeichnet die Position von N innerhalb des durch m bestimmten Intervalls. Diese Darstellung erlaubt eine lineare Form des Abstiegsoperators innerhalb jedes einzelnen Intervalls und wird in Kapitel 3 für die weitere Herleitung verwendet.

2.4 Eindeutigkeit der Intervallzuordnung

Die Intervalle

$$I_m = \{N \in \mathbb{N}_{>0} : m(m - 1) \leq N < m(m + 1)\}$$

sind paarweise disjunkt und überdecken die positiven natürlichen Zahlen vollständig. Das obere Ende von I_m ist

$$m(m + 1) - 1,$$

während das nachfolgende Intervall I_{m+1} bei

$$(m + 1)m = m(m + 1)$$

beginnt. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Intervallen entsteht daher weder eine Lücke noch eine Überschneidung.

Für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert somit genau ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$N \in I_m.$$

Dieses m ist gleich $t(N)$. Die Zuordnung

$$N \mapsto t(N)$$

ist daher eindeutig.

3. Der rekursive Dreieckszahlenabstieg

3.1 Definition des Abstiegsoperators

Sei $N \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$m = t(N).$$

Die zu N gehörende adaptive Dreieckszahl ist

$$T_{t(N)} = T_m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Der Abstiegsoperator wird definiert durch

$$F(N) = N - T_{t(N)}.$$

Damit lautet die vollständige Formel

$$F(N) = N - \frac{t(N)(t(N)+1)}{2}.$$

Der Operator verwendet in jedem Schritt die Dreieckszahl, deren Index durch den aktuellen Wert selbst festgelegt wird. Er unterscheidet sich damit von einer Rekursion mit konstantem Subtraktionswert ebenso wie von einem gewöhnlichen Greedy-Verfahren, bei dem jeweils die größte Dreieckszahl gewählt wird, die den aktuellen Wert nicht überschreitet.

Für den Triatrad-Abstieg wird $F(N)$ nur dann als nächster positiver Abstiegswert übernommen, wenn

$$F(N) > 0$$

gilt. Ist dagegen

$$F(N) \leq 0,$$

so endet der positive Abstiegsweg beim aktuellen Wert N . Ein terminaler Wert ist somit ein positiver natürlicher Wert, dessen nächster formaler Operatorwert nicht mehr positiv ist.

3.2 Rekursive Abstiegsfolge

Zu einem Ausgangswert $N_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ wird eine Folge

$$N_0, N_1, N_2, \dots$$

rekursiv erzeugt. Solange der nächste Wert positiv ist, gilt

$$N_{k+1} = F(N_k).$$

Die Rekursion endet beim ersten Index r , für den

$$F(N_r) \leq 0$$

gilt. Der letzte positive Wert N_r wird als terminaler Endwert des Ausgangswertes N_0 bezeichnet.

Die Endwertfunktion wird durch

$$E(N_0) = N_r$$

definiert.

Damit ist $E(N)$ nicht der erste nichtpositive Wert, den die formal fortgesetzte Subtraktion erzeugen würde. Der Endwert ist vielmehr der letzte positive Wert unmittelbar vor dem Verlassen von $\mathbb{N}_{>0}$.

3.3 Darstellung des Operators über die Intervallposition

Sei erneut

$$m = t(N)$$

und

$$N = m(m - 1) + r$$

mit

$$0 \leq r \leq 2m - 1.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} F(N) &= m(m - 1) + r - \frac{m(m + 1)}{2} \\ &= \frac{2m(m - 1) - m(m + 1)}{2} + r \\ &= \frac{m(m - 3)}{2} + r. \end{aligned}$$

Somit besitzt der Operator innerhalb des Intervalls I_m die lineare Form

$$F(N) = \frac{m(m - 3)}{2} + r.$$

Der nichtlineare Anteil des gesamten Abstiegs liegt damit ausschließlich in der erneuten Bestimmung des Intervallindex $m = t(N)$ nach jedem Schritt. Innerhalb

eines festen Intervalls wirkt F als einfache Verschiebung um die konstante Dreieckszahl T_m .

3.4 Größenreduktion eines Abstiegs

Für jeden positiven Wert N gilt

$$T_{t(N)} > 0.$$

Daher folgt unmittelbar

$$F(N) < N.$$

Sobald $F(N)$ positiv ist und als nächster Abstiegswert übernommen wird, gilt somit

$$0 < F(N) < N.$$

Jeder tatsächlich ausgeführte Schritt vermindert den aktuellen Wert streng. Die Folge positiver Abstiegswerte ist daher streng monoton fallend.

Die Größe der abgezogenen Dreieckszahl liegt näherungsweise bei der Hälfte des aktuellen Wertes. Aus

$$m(m-1) \leq N < m(m+1)$$

folgt für große m die Größenordnung

$$N \approx m^2.$$

Gleichzeitig gilt

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2} \approx \frac{m^2}{2}.$$

Damit besitzt der nächste Wert näherungsweise die Form

$$F(N) \approx \frac{N}{2}.$$

Diese Näherung erklärt, weshalb die beobachtete Anzahl der Abstiegsstufen in Testwerten unterschiedlicher Größenordnungen häufig in der Nähe der Bitlänge des Ausgangswertes liegt. Sie bestimmt jedoch nicht, welcher der vier terminalen Werte erreicht wird. Die terminale Klassenzuordnung hängt von den diskreten Abweichungen ab, die sich während der einzelnen Schritte ergeben.

3.5 Beispiel eines vollständigen Abstiegs

Für

$$N_0 = 589$$

ist

$$t(589) = \left\lfloor \frac{\sqrt{2357} + 1}{2} \right\rfloor = 24.$$

Die zugehörige Dreieckszahl lautet

$$T_{24} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300.$$

Daraus folgt

$$N_1 = 589 - 300 = 289.$$

Für den neuen Wert gilt

$$t(289) = 17$$

und damit

$$T_{17} = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153.$$

Somit erhält man

$$N_2 = 289 - 153 = 136.$$

Die vollständige Folge lautet

$$589 \rightarrow 289 \rightarrow 136 \rightarrow 58 \rightarrow 22 \rightarrow 7 \rightarrow 1.$$

Die für die sechs ausgeführten Abstiegsübergänge verwendeten Indizes sind

$$24, 17, 12, 8, 5, 3$$

Beim terminalen Wert 1 gilt anschließend $t(1) = 1$ und $F(1) = 0$.

Die abgezogenen Dreieckszahlen lauten

$$300, 153, 78, 36, 15, 6.$$

Beim letzten positiven Wert 1 gilt

$$t(1) = 1$$

und

$$F(1) = 1 - T_1 = 0.$$

Der Abstiegsweg endet daher bei

$$E(589) = 1.$$

3.6 Weitere kleine Beispiele

Für $N = 4$ gilt

$$t(4) = 2$$

und

$$F(4) = 4 - T_2 = 4 - 3 = 1.$$

Da

$$F(1) = 0,$$

folgt

$$4 \rightarrow 1$$

und damit

$$E(4) = 1.$$

Für $N = 5$ erhält man

$$5 \rightarrow 2,$$

denn

$$F(5) = 5 - 3 = 2$$

und

$$F(2) = 2 - 3 = -1.$$

Somit gilt

$$E(5) = 2.$$

Für $N = 9$ ist

$$t(9) = 3$$

und

$$F(9) = 9 - T_3 = 9 - 6 = 3.$$

Da

$$F(3) = 3 - T_2 = 0,$$

folgt

$$E(9) = 3.$$

Für $N = 16$ gilt

$$t(16) = 4$$

und

$$F(16) = 16 - T_4 = 16 - 10 = 6.$$

Da

$$F(6) = 6 - T_3 = 0,$$

ergibt sich

$$E(16) = 6.$$

Bereits diese vier Beispiele zeigen die vier möglichen terminalen Klassen:

$$4 \in \mathcal{C}_1, \quad 5 \in \mathcal{C}_2, \quad 9 \in \mathcal{C}_3, \quad 16 \in \mathcal{C}_6.$$

4. Endlichkeit und Eindeutigkeit des Abstiegs

4.1 Strenge Monotonie

Sei N_k ein nichtterminaler Wert einer Abstiegsfolge. Dann gilt

$$F(N_k) > 0.$$

Wegen

$$T_{t(N_k)} > 0$$

folgt zugleich

$$F(N_k) < N_k.$$

Somit gilt für jeden tatsächlich ausgeführten Abstiegsschritt

$$0 < N_{k+1} < N_k.$$

Die positiven Glieder jeder Abstiegsfolge bilden daher eine streng fallende Folge natürlicher Zahlen.

4.2 Endlichkeit

Eine unendliche streng fallende Folge positiver natürlicher Zahlen existiert nicht.

Folglich kann die Rekursion nicht unendlich viele positive Abstiegswerte erzeugen.

Zu jedem Ausgangswert $N_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ existiert daher ein endlicher Index r mit

$$F(N_r) \leq 0.$$

Der positive Abstiegsweg endet nach endlich vielen Schritten bei N_r .

Damit ist die Endwertfunktion

$$E: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$$

für jeden positiven natürlichen Ausgangswert wohldefiniert.

4.3 Ausschluss von Zyklen

Ein Zyklus der Länge $s \geq 1$ würde positive Werte

$$N_0, N_1, \dots, N_{s-1}$$

mit

$$F(N_i) = N_{i+1}$$

und

$$F(N_{s-1}) = N_0$$

voraussetzen.

Aus der strengen Monotonie ergäbe sich jedoch

$$N_0 > N_1 > \dots > N_{s-1} > N_0.$$

Diese Ungleichung ist unmöglich. Der Operator besitzt daher innerhalb der positiven natürlichen Zahlen keine Zyklen.

Insbesondere gibt es keine nichtterminalen Fixpunkte. Aus

$$F(N) = N$$

würde

$$T_{t(N)} = 0$$

folgen, was für $t(N) \geq 1$ ausgeschlossen ist.

4.4 Eindeutigkeit des Abstiegsweges

Die Funktion $t(N)$ ordnet jedem positiven natürlichen Wert genau einen Index zu. Dieser Index bestimmt genau eine Dreieckszahl. Folglich besitzt jedes N genau einen formalen Nachfolger

$$F(N).$$

Da sämtliche weiteren Werte erneut eindeutig aus ihrem jeweiligen Vorgänger berechnet werden, ist die gesamte Abstiegsfolge eines Ausgangswertes eindeutig bestimmt.

Zu jedem

$$N \in \mathbb{N}_{>0}$$

existiert somit genau ein terminaler Endwert

$$E(N).$$

Zwei verschiedene Ausgangswerte können auf denselben Zwischenwert treffen. Ab diesem gemeinsamen Knoten verlaufen ihre Abstiege identisch weiter. Ein einzelner Ausgangswert kann dagegen weder zwischen mehreren Wegen wählen noch mehrere Endwerte besitzen.

4.5 Satz über Existenz und Eindeutigkeit

Satz 1. Zu jedem positiven natürlichen Wert N existiert unter dem rekursiven Dreieckszahlenabstieg ein eindeutig bestimmter endlicher Abstiegsweg und genau ein terminaler Endwert $E(N)$.

Beweis. Die Zuordnung $N \mapsto t(N)$ ist eindeutig. Daher ist auch

$$F(N) = N - T_{t(N)}$$

eindeutig. Jeder positive Nachfolger ist wegen $T_{t(N)} > 0$ streng kleiner als sein Vorgänger. Die Folge der positiven Abstiegswerte ist somit streng fallend und muss nach endlich vielen Schritten enden. Da in jedem Schritt genau ein Nachfolger existiert, ist auch der letzte positive Wert eindeutig. Damit existiert für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ genau ein Endwert $E(N)$. ▫

5. Das kanonische Triatrad

5.1 Terminale Werte

Ein Wert $N \in \mathbb{N}_{>0}$ heißt terminal, wenn sein nächster formaler Operatorwert nicht positiv ist. Es gilt somit

$$N \text{ ist terminal} \Leftrightarrow F(N) \leq 0.$$

Mit

$$F(N) = N - T_{t(N)}$$

ist dies äquivalent zu

$$N \leq T_{t(N)}.$$

Sei

$$m = t(N).$$

Dann muss ein terminaler Wert zugleich die beiden Bedingungen

$$m(m-1) \leq N < m(m+1)$$

und

$$N \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

erfüllen.

Damit kann ein terminaler Wert nur existieren, wenn das untere Ende des Intervalls I_m nicht oberhalb der zugehörigen Dreieckszahl liegt.

5.2 Schranke für den terminalen Index

Aus

$$m(m-1) \leq N$$

und

$$N \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

folgt

$$m(m-1) \leq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Da $m > 0$ gilt, kann durch m dividiert werden:

$$m - 1 \leq \frac{m + 1}{2}.$$

Multiplikation mit 2 ergibt

$$2m - 2 \leq m + 1.$$

Somit folgt

$$m \leq 3.$$

Jeder terminale Wert muss daher in einem der ersten drei Intervalle

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3$$

liegen. Für alle

$$m \geq 4$$

ist kein terminaler Wert möglich.

5.3 Terminale Werte für $m = 1$

Für

$$m = 1$$

lautet das Intervall

$$I_1 = \{1\}.$$

Die zugehörige Dreieckszahl ist

$$T_1 = 1.$$

Damit gilt

$$F(1) = 1 - 1 = 0.$$

Der einzige terminale Wert dieser Stufe ist

$$1.$$

5.4 Terminale Werte für $m = 2$

Für

$$m = 2$$

lautet das Intervall

$$I_2 = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Die zugehörige Dreieckszahl ist

$$T_2 = 3.$$

Terminal sind genau jene Werte $N \in I_2$, für die

$$N \leq 3$$

gilt. Dies liefert

$$N = 2$$

und

$$N = 3.$$

Tatsächlich ist

$$F(2) = 2 - 3 = -1$$

und

$$F(3) = 3 - 3 = 0.$$

Die terminalen Werte der zweiten Stufe sind daher

$$2, \quad 3.$$

5.5 Terminale Werte für $m = 3$

Für

$$m = 3$$

lautet das Intervall

$$I_3 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

Die zugehörige Dreieckszahl ist

$$T_3 = 6.$$

Die Terminalbedingung

$$N \leq 6$$

wird innerhalb dieses Intervalls ausschließlich von

$$N = 6$$

erfüllt.

Es gilt

$$F(6) = 6 - 6 = 0.$$

Der einzige terminale Wert der dritten Stufe ist somit

6.

5.6 Ausschluss weiterer terminaler Werte

Für $m \geq 4$ gilt

$$m(m-1) > \frac{m(m+1)}{2}.$$

Jeder Wert des Intervalls I_m erfüllt daher

$$N \geq m(m-1) > T_m.$$

Somit ist

$$F(N) = N - T_m > 0.$$

Kein Wert eines Intervalls mit $m \geq 4$ kann terminal sein.

Die vollständige Menge der positiven terminalen Werte lautet daher

$$\{1, 2, 3, 6\}.$$

5.7 Definition des Triatrad

Die Menge

$$\mathcal{T} := \{1, 2, 3, 6\}$$

heißt das kanonische Triatrad des rekursiven Dreieckszahlenabstiegs.

Die Bezeichnung kanonisch verweist darauf, dass die Menge nicht frei ausgewählt wird. Sie folgt eindeutig und vollständig aus der Definition des Operators und der Bedingung, dass der positive Abstiegsweg beim letzten positiven Wert endet.

5.8 Kanonischer Triatrad-Satz

Satz 2. Für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Die Menge

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}$$

ist die vollständige Menge aller positiven terminalen Endwerte des rekursiven Dreieckszahlenabstiegs.

Beweis. Nach Satz 1 endet jeder positive Abstiegsweg nach endlich vielen Schritten bei einem terminalen Wert. Für einen terminalen Wert mit $m = t(N)$ gelten

$$m(m-1) \leq N$$

und

$$N \leq T_m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Daraus folgt $m \leq 3$. Die drei möglichen Stufen liefern die terminalen Mengen

$$m = 1: \quad \{1\},$$

$$m = 2: \quad \{2, 3\},$$

und

$$m = 3: \quad \{6\}.$$

Für $m \geq 4$ ist kein terminaler Wert möglich. Damit ist die vollständige terminale Menge

$$\{1, 2, 3, 6\}.$$

Folglich gilt für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$E(N) \in \mathcal{T}.$$

5.9 Bedeutung des Satzes

Der Triatrad-Satz beantwortet vollständig die Frage, welche positiven Endwerte unter dem Operator überhaupt möglich sind. Es existiert kein fünfter terminaler Wert.

Der Satz beantwortet dagegen nicht, welcher der vier Endwerte zu einem konkret gegebenen Ausgangswert gehört. Die Aussagen

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}$$

und

$$E(N) = e$$

für ein bestimmtes $e \in \mathcal{T}$ sind logisch voneinander zu trennen. Die erste Aussage ist durch den Triatrad-Satz geklärt. Die zweite erfordert bislang die tatsächliche Ausführung des rekursiven Abstiegs.

Damit entsteht unmittelbar das zentrale offene Klassifikationsproblem:

Welche arithmetische Eigenschaft von N bestimmt seinen Wert $E(N)$?

6. Die Endwertfunktion und die vier Triatrad-Klassen

6.1 Definition der Endwertfunktion

Nach Satz 1 besitzt jeder positive natürliche Wert N genau einen terminalen Endwert.

Nach Satz 2 gehört dieser Endwert stets zum kanonischen Triatrad

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Damit ist die Endwertfunktion

$$E: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathcal{T}$$

wohldefiniert.

Für die vier terminalen Werte gilt unmittelbar

$$E(1) = 1, \quad E(2) = 2, \quad E(3) = 3, \quad E(6) = 6.$$

Für jeden nichtterminalen Wert gilt rekursiv

$$E(N) = E(F(N)).$$

Die Endwertfunktion ist somit entlang jedes Abstiegsweges invariant. Falls

$$N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \cdots \rightarrow N_r$$

ein vollständiger Abstiegsweg ist, gilt

$$E(N_0) = E(N_1) = \cdots = E(N_r) = N_r.$$

Der Endwert ist daher nicht nur dem Ausgangswert zugeordnet. Er ist eine gemeinsame Eigenschaft aller Knoten desselben Abstiegsweges.

6.2 Definition der Triatrad-Klassen

Für jedes terminale Element

$$e \in \mathcal{T}$$

wird die zugehörige Triatrad-Klasse durch

$$\mathcal{C}_e = \{N \in \mathbb{N}_{>0} : E(N) = e\}$$

definiert.

Damit entstehen die vier Klassen

$$\mathcal{C}_1, \quad \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}_3, \quad \mathcal{C}_6.$$

Jede Klasse enthält ihren eigenen terminalen Wert:

$$1 \in \mathcal{C}_1, \quad 2 \in \mathcal{C}_2, \quad 3 \in \mathcal{C}_3, \quad 6 \in \mathcal{C}_6.$$

Ein Wert gehört genau dann zu $\mathcal{C}_e$, wenn sein vollständiger Abstiegsweg bei e endet.

6.3 Disjunktheit der Klassen

Seien $e_1, e_2 \in \mathcal{T}$ mit

$$e_1 \neq e_2.$$

Angenommen, es existiere ein Wert

$$N \in \mathcal{C}_{e_1} \cap \mathcal{C}_{e_2}.$$

Dann müsste gleichzeitig

$$E(N) = e_1$$

und

$$E(N) = e_2$$

gelten.

Dies widerspricht der Eindeutigkeit der Endwertfunktion. Daher gilt

$$\mathcal{C}_{e_1} \cap \mathcal{C}_{e_2} = \emptyset.$$

Die vier Triatrad-Klassen sind somit paarweise disjunkt.

6.4 Vollständigkeit der Klassenzerlegung

Für jedes

$$N \in \mathbb{N}_{>0}$$

gilt nach dem Triatrad-Satz

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Somit gehört jedes positive natürliche N mindestens einer der vier Klassen an. Wegen der Disjunktheit gehört es zugleich höchstens einer Klasse an.

Daraus folgt die vollständige Zerlegung

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6.$$

Das Symbol $\dot{\cup}$ kennzeichnet die disjunkte Vereinigung. Die positive natürliche Zahlenmenge wird damit durch den rekursiven Dreieckszahlenabstieg vollständig und eindeutig in vier terminale Klassen partitioniert.

6.5 Vierklassen-Satz

Satz 3. Die Endwertfunktion E erzeugt eine vollständige disjunkte Partition der positiven natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6.$$

Beweis. Nach Satz 2 nimmt $E(N)$ für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ genau einen Wert aus $\mathcal{T} = \{1,2,3,6\}$ an. Daher gehört jedes N zu mindestens einer der vier Klassen. Wegen der Eindeutigkeit von $E(N)$ kann kein N zwei verschiedenen Klassen angehören. Somit sind die Klassen vollständig und paarweise disjunkt.

6.6 Erste Elemente der vier Klassen

Die ersten nichtterminalen Beispiele zeigen bereits, dass alle vier Klassen nichtleer sind:

$$4 \rightarrow 1,$$

$$5 \rightarrow 2,$$

$$9 \rightarrow 3,$$

$$16 \rightarrow 6.$$

Daraus folgt

$$4 \in \mathcal{C}_1, \quad 5 \in \mathcal{C}_2, \quad 9 \in \mathcal{C}_3, \quad 16 \in \mathcal{C}_6.$$

Weitere Werte entstehen durch Rückwärtskonstruktion. Jeder Wert, der in einem Schritt auf einen bereits bekannten Knoten der Klasse $\mathcal{C}_e$ absteigt, gehört ebenfalls zu $\mathcal{C}_e$.

6.7 Rekursive Dreieckszahlenzerlegung

Sei

$$N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \cdots \rightarrow N_r = E(N_0)$$

ein vollständiger Abstiegsweg. Für jeden Schritt gilt

$$N_{k+1} = N_k - T_{t(N_k)}.$$

Daraus folgt

$$N_k = N_{k+1} + T_{t(N_k)}.$$

Durch wiederholtes Einsetzen erhält man

$$N_0 = E(N_0) + \sum_{k=0}^{r-1} T_{t(N_k)}.$$

Jeder positive natürliche Wert besitzt damit eine durch seinen Abstiegsweg eindeutig bestimmte Darstellung als terminaler Triatrad-Wert plus eine endliche Summe adaptiv ausgewählter Dreieckszahlen:

$$N = E(N) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t(N_k)(t(N_k) + 1)}{2}.$$

Diese Darstellung ist nicht mit einer beliebigen Zerlegung in Dreieckszahlen gleichzusetzen. Die Indizes werden nicht frei gewählt, sondern in jedem Schritt eindeutig aus dem aktuellen Restwert bestimmt.

Die gesamte Abstiegsfolge legt daher ein eindeutiges Abstiegswort

$$t(N_0), t(N_1), \dots, t(N_{r-1})$$

fest. Dieses Wort enthält die vollständige Folge der entfernten Dreieckszahlen und endet bei genau einem Triatrad-Wert.

6.8 Invarianz entlang zusammenlaufender Wege

Seien N und M zwei positive natürliche Werte, deren Abstiegswege einen gemeinsamen Knoten R erreichen. Dann existieren natürliche Zahlen i und j mit

$$F^i(N) = R$$

und

$$F^j(M) = R.$$

Ab diesem Knoten verlaufen beide Wege identisch. Folglich gilt

$$E(N) = E(R) = E(M).$$

Zusammenlaufende Abstiegswege können daher niemals unterschiedlichen Triatrad-Klassen angehören. Sobald zwei Wege einen gemeinsamen Knoten besitzen, gehören

sämtliche aufwärts gelegenen Vorgänger beider Wege demselben terminalen Baum an.

7. Die Vierbaumzerlegung

7.1 Gerichteter Abstiegsgraph

Der rekursive Dreieckszahlenabstieg kann als gerichteter Graph dargestellt werden.

Die Knotenmenge ist

$$V = \mathbb{N}_{>0}.$$

Für jeden nichtterminalen Wert N wird eine gerichtete Kante

$$N \rightarrow F(N)$$

eingefügt.

Terminale Werte besitzen innerhalb des positiven Abstiegsgraphen keine ausgehende Kante, da ihr formaler Nachfolger nicht positiv ist.

Jeder nichtterminale Knoten besitzt genau eine ausgehende Kante. Die Anzahl eingehender Kanten kann dagegen null, eins oder größer als eins sein. Damit ist der Graph vorwärts deterministisch, rückwärts jedoch verzweigt.

7.2 Die vier Wurzeln

Nach dem Triatrad-Satz endet jeder gerichtete Weg bei genau einem der vier terminalen Werte

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6.$$

Diese vier Werte bilden die Wurzeln der vier Rückwärtsbäume.

Der Baum mit der Wurzel $e \in \mathcal{T}$ besitzt die Knotenmenge

$$\mathcal{C}_e.$$

Die Kanten innerhalb dieses Baumes sind genau die Abstiegsrelationen

$$N \rightarrow F(N)$$

für alle nichtterminalen

$$N \in \mathcal{C}_e.$$

7.3 Baumstruktur einer Triatrad-Klasse

Jede Klasse $\mathcal{C}_e$ bildet einen gerichteten, zur Wurzel e orientierten Baum.

Dafür sind drei Eigenschaften maßgeblich:

Erstens besitzt jeder Knoten außer der Wurzel genau einen gerichteten Weg zur Wurzel.

Zweitens existiert innerhalb der Klasse kein gerichteter Zyklus.

Drittens kann ein Knoten mehrere unmittelbare Vorgänger besitzen.

Die Richtung des Operators zeigt von größeren zu kleineren Zahlen. Betrachtet man die Struktur rückwärts, entstehen aus einem Knoten sämtliche Werte, die in einem Schritt auf ihn absteigen. Dadurch bilden sich Verzweigungen.

7.4 Vorgänger eines Knotens

Sei

$$M \in \mathbb{N}_{>0}$$

ein fester Knoten. Gesucht sind alle Werte N , für die

$$F(N) = M$$

gilt.

Sei

$$m = t(N).$$

Aus

$$F(N) = N - T_m = M$$

folgt

$$N = M + T_m.$$

Damit ein solcher Kandidat tatsächlich den Index m besitzt, muss er im Intervall I_m liegen:

$$m(m-1) \leq M + T_m < m(m+1).$$

Mit

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2}$$

folgt

$$m(m-1) \leq M + \frac{m(m+1)}{2} < m(m+1).$$

Die linke Ungleichung ergibt

$$M \geq m(m-1) - \frac{m(m+1)}{2}$$

und damit

$$M \geq \frac{m(m-3)}{2}.$$

Aus der rechten Ungleichung folgt

$$M < m(m+1) - \frac{m(m+1)}{2}$$

und somit

$$M < \frac{m(m+1)}{2}.$$

Da M ganzzahlig ist, kann dies geschrieben werden als

$$M \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1.$$

Ein Wert $N = M + T_m$ ist daher genau dann ein unmittelbarer Vorgänger von M , wenn

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1$$

gilt.

7.5 Vorgängerformel

Für jeden festen Knoten M und jeden positiven ganzzahligen Index m , der die Bedingung

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1$$

erfüllt, existiert genau ein unmittelbarer Vorgänger

$$N = M + T_m.$$

Somit lautet die Vorgängermenge von M :

$$\text{Pred}(M) = \left\{ M + \frac{m(m+1)}{2} : m \in \mathbb{N}_{>0}, \frac{m(m-3)}{2} \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1 \right\}.$$

Diese Formel ermöglicht die vollständige Rückwärtskonstruktion aller vier Triatrad-Bäume.

7.6 Endlichkeit der unmittelbaren Vorgängermenge

Für einen festen Wert M kann die Vorgängerbedingung nur von endlich vielen Indizes m erfüllt werden. Aus

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq M$$

folgt

$$m^2 - 3m - 2M \leq 0.$$

Die positive Nullstelle der zugehörigen quadratischen Gleichung ist

$$m = \frac{3 + \sqrt{9 + 8M}}{2}.$$

Daher gilt für jeden möglichen Vorgängerindex

$$m \leq \frac{3 + \sqrt{9 + 8M}}{2}.$$

Jeder Knoten besitzt somit nur endlich viele unmittelbare Vorgänger. Die Zahl der möglichen Vorgänger kann mit wachsendem M zunehmen, bleibt für jeden einzelnen Knoten jedoch endlich.

7.7 Beispiel einer Rückwärtskonstruktion

Für die Wurzel

$$M = 1$$

lautet die Vorgängerbedingung

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq 1 \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1.$$

Für $m = 2$ gilt

$$-1 \leq 1 \leq 2.$$

Damit entsteht der Vorgänger

$$N = 1 + T_2 = 1 + 3 = 4.$$

Tatsächlich gilt

$$F(4) = 1.$$

Für $m = 3$ gilt

$$0 \leq 1 \leq 5.$$

Daraus folgt der Vorgänger

$$N = 1 + T_3 = 7.$$

Auch hier gilt

$$F(7) = 1.$$

Für $m = 4$ gilt

$$2 \leq 1,$$

was falsch ist. Größere Werte von m erfüllen die linke Ungleichung ebenfalls nicht.

Damit besitzt 1 genau die unmittelbaren nichtterminalen Vorgänger

$$4 \quad \text{und} \quad 7.$$

Der erste Abschnitt des Baumes $\mathcal{C}_1$ beginnt somit mit

$$4 \rightarrow 1$$

und

$$7 \rightarrow 1.$$

Von den Knoten 4 und 7 aus können weitere Vorgängerschichten rekursiv erzeugt werden.

7.8 Verschmelzung von Abstiegswegen

Besitzen zwei verschiedene Werte N_1 und N_2 denselben Nachfolger M , so gilt

$$N_1 \rightarrow M$$

und

$$N_2 \rightarrow M.$$

Ab dem Knoten M sind die beiden Abstiegswege identisch. Die Wege verschmelzen und können sich im weiteren Abstieg nicht wieder trennen, da jeder Knoten nur einen Nachfolger besitzt.

Damit ist der vorwärts gerichtete Graph durch fortschreitende Verschmelzung gekennzeichnet. Rückwärts betrachtet entspricht dieselbe Struktur einer Verzweigung.

7.9 Unendlichkeit der vier Bäume

Jeder der vier terminalen Bäume besitzt unendlich viele Knoten.

Sei zunächst M ein beliebiger Knoten. Für hinreichend große geeignete Vorgängerketten können Werte konstruiert werden, die nach endlich vielen Schritten auf M absteigen. Bereits die wiederholte Anwendung der Vorgängerformel erzeugt fortlaufend größere Werte.

Da jede Wurzel mindestens einen nichtterminalen Vorgänger besitzt und die Rückwärtskonstruktion iteriert werden kann, entstehen in jeder Klasse unbeschränkt große Werte. Somit sind alle vier Mengen

$$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_6$$

unendlich.

Diese Unendlichkeit bedeutet nicht, dass die vier Klassen gleich dicht verteilt sein müssen. Die Baumgrößen innerhalb endlicher Intervalle können erheblich voneinander abweichen. Auch große lokale Lücken einzelner Klassen sind mit der globalen Unendlichkeit vereinbar.

7.10 Vierbaum-Satz

Satz 4. Der gerichtete Abstiegsgraph des rekursiven Dreieckszahlenoperators zerfällt in genau vier disjunkte gerichtete Rückwärtsbäume mit den Wurzeln 1, 2, 3 und 6.

Beweis. Jeder positive natürliche Wert besitzt genau einen endlichen gerichteten Weg zu genau einem terminalen Wert. Nach Satz 2 ist dieser terminale Wert eines der vier Elemente 1, 2, 3 oder 6. Wegen der Eindeutigkeit des Endwertes sind die vier Knotenmengen paarweise disjunkt. Zyklen existieren nicht. Jeder nichtterminale Knoten besitzt genau einen Nachfolger, kann jedoch mehrere Vorgänger besitzen. Daher bildet jede Endwertklasse einen zur terminalen Wurzel gerichteten Rückwärtsbaum. Zusammen überdecken diese vier Bäume die gesamte Menge $\mathbb{N}_{>0}$.

7.11 Der Triatrad-Wald

Die Gesamtheit der vier Bäume kann als gerichteter Wald

$$\mathcal{T} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} \mathcal{B}_2 \dot{\cup} \mathcal{B}_3 \dot{\cup} \mathcal{B}_6$$

bezeichnet werden.

Dabei besitzt $\mathfrak{B}_e$ die Knotenmenge $\mathcal{C}_e$ und die Wurzel e .

Die Vierbaumzerlegung ist damit stärker als die bloße Aussage, dass vier Endwerte existieren. Sie ordnet jedem positiven natürlichen Wert zugleich eine terminale Identität und eine eindeutige Position innerhalb eines von vier globalen Rückwärtsbäumen zu.

8. Das Problem der direkten Klassenzuordnung

8.1 Rekursive Bestimmbarkeit

Die Endwertfunktion ist algorithmisch vollständig bestimmt. Für terminale Werte gilt

$$E(1) = 1, \quad E(2) = 2, \quad E(3) = 3, \quad E(6) = 6.$$

Für alle übrigen Werte gilt

$$E(N) = E(F(N)).$$

Damit kann der Endwert jedes beliebigen positiven natürlichen Wertes durch wiederholte Anwendung des Operators berechnet werden.

Die rekursive Bestimmbarkeit löst jedoch nicht die Frage, welche arithmetische Eigenschaft den Endwert festlegt.

8.2 Direkte Bestimmung

Gesucht ist eine Funktion oder Entscheidungsregel, die den Wert

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}$$

ohne vollständige Ausführung der Abstiegsfolge bestimmt.

Eine solche Regel hätte die Form

$$E(N) = G(N),$$

wobei G nicht rekursiv auf die wiederholte Anwendung von F zurückgreift.

Eine direkte Regel könnte beispielsweise auf einer Kongruenzstruktur, einer besonderen Darstellung von N , einer Invariante, einer Ziffern- oder Bitstruktur oder einer geschlossenen Charakterisierung der Rückwärtsbäume beruhen. Bislang ist keine solche allgemeine Regel bekannt.

8.3 Abgrenzung zweier Fragen

Der Triatrad-Satz beantwortet die Frage

Welche terminalen Werte sind möglich?

vollständig.

Die Antwort lautet

$$\{1,2,3,6\}.$$

Davon zu unterscheiden ist die Frage

Welcher dieser vier Werte gehört zu einem gegebenen N ?

Diese zweite Frage bleibt offen.

Die Vollständigkeit der Endmenge ist daher kein Ersatz für eine direkte Klassencharakterisierung. Umgekehrt würde eine direkte Klassenregel den Triatrad-Satz nicht ersetzen, sondern ergänzen.

8.4 Gesuchte Klasseninvariante

Eine besonders starke Lösung des Klassifikationsproblems wäre eine arithmetische Größe

$$I(N)$$

mit der Eigenschaft, dass der Wert von $I(N)$ die Klasse von N eindeutig bestimmt.

Dann könnte eine Abbildung

$$\Phi$$

existieren, sodass

$$E(N) = \Phi(I(N)).$$

Eine solche Größe müsste nicht notwendig während des Abstiegs numerisch konstant bleiben. Es würde genügen, wenn sie die terminale Zugehörigkeit bereits im Ausgangswert vollständig codiert.

Eine noch stärkere Form wäre eine Invariante mit

$$I(N) = I(F(N))$$

für alle nichtterminalen N . Dann wäre I entlang jedes Abstiegsweges konstant und könnte unmittelbar mit dem terminalen Wert verknüpft werden.

8.5 Rekursives Abstiegswort als vollständige Codierung

Auch ohne direkte Invariante besitzt jeder Wert bereits eine vollständige rekursive Codierung durch sein Abstiegswort

$$W(N) = (t(N_0), t(N_1), \dots, t(N_{r-1})).$$

Dieses Wort bestimmt sämtliche entfernten Dreieckszahlen und damit den gesamten Weg. Es enthält folglich auch den Endwert.

Das offene Problem besteht nicht darin, ob genügend Information vorhanden ist. Die gesamte Wegfolge enthält den Endwert definitionsgemäß. Gesucht ist vielmehr eine wesentlich kompaktere Eigenschaft, die aus N direkt berechnet werden kann und dieselbe Klassenzuordnung liefert.

8.6 Die Rolle diskreter Abweichungen

Da

$$F(N) \approx \frac{N}{2}$$

gilt, besitzen die Abstiegswege aller vier Klassen eine ähnliche grobe Größenhülle. Die Klasseninformation kann daher nicht allein aus der näherungsweisen Halbierung folgen.

Schreibe

$$N = m(m - 1) + r$$

mit

$$m = t(N)$$

und

$$0 \leq r \leq 2m - 1.$$

Dann gilt

$$F(N) = \frac{m(m - 3)}{2} + r.$$

Verglichen mit einer exakten Halbierung kann die Abweichung durch

$$\delta(N) = F(N) - \frac{N}{2}$$

beschrieben werden.

Einsetzen der Intervallform ergibt

$$\delta(N) = \frac{r}{2} - m.$$

Damit lautet der exakte Schritt

$$F(N) = \frac{N}{2} + \frac{r}{2} - m.$$

Wegen

$$0 \leq r \leq 2m - 1$$

gilt stets

$$\frac{r}{2} - m \leq -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$F(N) < \frac{N}{2}.$$

Die grobe Dynamik wird durch den Halbierungsterm bestimmt. Die feinere Wegstruktur liegt in der Folge der diskreten Korrekturen

$$\frac{r_k}{2} - m_k.$$

Es ist möglich, dass die terminale Klasse durch eine bislang unbekannte Gesamtstruktur dieser Korrekturfolge bestimmt wird.

8.7 Direkte Klassenzuordnung als eigenständiges Forschungsproblem

Die Suche nach einer direkten Endwertfunktion ist nicht nur eine Frage der Beschleunigung. Eine solche Funktion könnte eine Eigenschaft natürlicher Zahlen sichtbar machen, die durch die Rekursion zwar zuverlässig erkannt, aber noch nicht arithmetisch benannt wird.

Die offene Leitfrage lautet daher:

Was ist $E(N)$ als arithmetische Funktion?

Daran schließen sich insbesondere folgende Fragen an:

Besitzen die vier Klassen unterschiedliche Kongruenzsignaturen?

Existieren Zahlenformen, die ausschließlich oder bevorzugt in einer bestimmten Klasse auftreten?

Lässt sich die Klassenzugehörigkeit aus der Intervallposition r oder aus einer Folge solcher Positionen bestimmen?

Besitzt jeder Baum eine geschlossene Rückwärtsbeschreibung?

Existiert eine nichtrekursive Darstellung von $E(N)$?

Diese Fragen betreffen nicht mehr die Existenz des Triatrad, sondern die innere arithmetische Bedeutung der Vierbaumzerlegung.

8.8 Verhältnis zwischen Beweis und Empirie

Der kanonische Triatrad-Satz ist unabhängig von numerischen Testreihen bewiesen. Die empirischen Untersuchungen dienen daher nicht dem Nachweis, dass die Endwertmenge

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}$$

für alle positiven natürlichen Ausgangswerte vollständig ist. Diese Aussage folgt bereits aus der Definition des Operators und der Charakterisierung der terminalen Werte.

Die numerische Untersuchung richtet sich auf eine andere Ebene. Sie fragt nicht mehr, welche Endwerte möglich sind, sondern wie die vier Endwertklassen innerhalb großer zusammenhängender Zahlenbereiche angeordnet sind. Untersucht werden insbesondere die globalen Klassengewichte, die Reihenfolge benachbarter Endwerte, lokale Dichteverchiebungen, Folgen gleicher Klassen und ausgedehnte Intervalle, in denen eine einzelne Klasse vollständig fehlt.

Damit stehen Beweis und Empirie in einem ergänzenden Verhältnis. Der Beweis bestimmt die vollständige terminale Menge. Die Empirie untersucht die innere räumliche Struktur der daraus hervorgehenden Vierbaumzerlegung.

Formal ist für jedes $N \in \mathbb{N}_{>0}$ bereits bekannt, dass

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}$$

gilt. Die statistische Untersuchung richtet sich dagegen auf Funktionen und Relationen der Form

$$C_e(A, B) = \#\{N \in [A, B] : E(N) = e\},$$

$$P_e(A, B) = \frac{C_e(A, B)}{B - A + 1},$$

sowie auf die Nachbarschaftsbeziehung

$$E(N) \rightarrow E(N + 1).$$

Für einen Endwert $e \in \mathcal{T}$ wird außerdem untersucht, ob und in welcher Länge Intervalle existieren, in denen

$$E(N) \neq e$$

für sämtliche darin enthaltenen Werte gilt.

Die empirischen Ergebnisse können keine direkte arithmetische Klassifikationsregel ersetzen. Sie können jedoch Hinweise darauf liefern, ob die vier Klassen annähernd unabhängig verteilt sind oder ob ihre Anordnung durch zusätzliche deterministische Strukturen geprägt wird. Gerade großräumige Voids, gerichtete Übergänge und wiederkehrende lokale Verteilungszustände wären mit einer rein unstrukturierten Vierklassenfolge nur schwer vereinbar.

8.9 Übergang zur numerischen Untersuchung

Die zentrale empirische Leitfrage lautet:

Wie sind die vier Triatrad-Klassen entlang der natürlichen Zahlen angeordnet?

Diese Frage besitzt mehrere Ebenen. Zunächst ist zu bestimmen, welchen Anteil jede Klasse innerhalb eines großen zusammenhängenden Bereichs einnimmt. Danach ist zu untersuchen, ob sich die Endwerte benachbarter Zahlen unabhängig voneinander verhalten oder bevorzugte Übergänge bilden. Schließlich ist zu prüfen, ob die Klassen überall lokal vertreten sind oder ob zusammenhängende Ausschlussbereiche einzelner Endwerte auftreten.

Für diese Zwecke wurde die Endwertfunktion im Bereich

$$10 \leq N \leq 1.000.000.009$$

für genau eine Milliarde aufeinanderfolgende natürliche Zahlen berechnet. Die daraus entstandene Datenbasis enthält für jedes untersuchte N ausschließlich die eindeutige Zuordnung

$$N \mapsto E(N).$$

Die individuellen Abstiegswege wurden in dieser Testreihe nicht gespeichert. Dadurch konnte die Datenmenge auf die für die Klassen- und Void-Analyse wesentliche Information beschränkt werden. Die Berechnung der Abstiegsdauer und vollständiger Routen erfolgte unabhängig davon anhand kleinerer Testreihen und ausgewählter Einzelwerte.

9. Methodik der numerischen Untersuchung

9.1 Zielsetzung der Haupttestreihe

Ziel der Haupttestreihe war die lückenlose Bestimmung des Triatrad-Endwertes für eine Milliarde aufeinanderfolgende Ausgangswerte. Der untersuchte Bereich begann bei

$$N_{\text{Start}} = 10$$

und besaß die Länge

$$L = 1.000.000.000.$$

Der letzte enthaltene Wert war daher

$$N_{\text{Ende}} = N_{\text{Start}} + L - 1 = 1.000.000.009.$$

Für jedes N wurde der rekursive Dreieckszahlenabstieg so lange ausgeführt, bis einer der vier Endwerte erreicht war. Gespeichert wurde anschließend ausschließlich

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Diese Reduktion auf den Endwert war notwendig, weil die Speicherung sämtlicher Zwischenstationen die Datenmenge erheblich vergrößert hätte. Bereits für kleinere Testreihen zeigte sich, dass die Zahl der gespeicherten Stationen pro Ausgangswert mit dessen Größenordnung zunimmt. Für die Untersuchung von Klassengewichten, Reihenfolgen und Voids werden die vollständigen Wege jedoch nicht benötigt.

9.2 Ganzzahlige Berechnung des Abstiegs

Die Indexfunktion wurde ohne Gleitkommaarithmetik berechnet. Für einen aktuellen Wert N gilt

$$t(N) = \left\lfloor \frac{\sqrt{4N+1} + 1}{2} \right\rfloor.$$

Im Programm wurde die ganzzahlige Quadratwurzel verwendet, sodass Rundungsfehler durch binäre Gleitkommazahlen ausgeschlossen wurden. Der nächste Abstiegswert wurde durch

$$N_{\text{neu}} = N - \frac{t(N)(t(N) + 1)}{2}$$

bestimmt.

Die Rekursion endete, sobald der aktuelle Wert zu

$$\{1,2,3,6\}$$

gehörte. Für die Haupttestreihe wurde zusätzlich eine hohe maximale Schrittzahl als Sicherheitsgrenze festgelegt. Diese Grenze wurde in keinem berechneten Fall erreicht.

9.3 Kompakte Endwertcodierung

Da nur vier verschiedene Endwerte auftreten können, lässt sich jeder Endwert durch genau zwei Bit darstellen. Verwendet wurde die Codierung

$$1 \mapsto 00,$$

$$2 \mapsto 01,$$

$$3 \mapsto 10,$$

$$6 \mapsto 11.$$

Vier aufeinanderfolgende Endwerte konnten dadurch in einem Byte gespeichert werden. Für eine Milliarde Zuordnungen ergibt sich eine reine Nutzdatenmenge von

$$1.000.000.000 \cdot \frac{2}{8} = 250.000.000$$

Byte.

Die Zuordnung der Zwei-Bit-Codes erfolgte innerhalb jedes Bytes in fester Reihenfolge, beginnend mit den höchstwertigen Bitpositionen. Dadurch ist jeder gespeicherte Wert über seine Position innerhalb der Gesamtfolge eindeutig rekonstruierbar.

Für den Index i mit

$$0 \leq i < L$$

gehört der gespeicherte Endwert zum Ausgangswert

$$N = N_{\text{start}} + i.$$

Die Datenbank musste deshalb nicht jeden Ausgangswert erneut als eigene Ganzzahl speichern. Seine Position in der lückenlosen Folge genügte.

9.4 Chunkstruktur der Datenbank

Die Milliarde Endwerte wurde in Blöcken zu jeweils

1.000.000

Werten gespeichert. Dadurch entstanden genau

1.000

Chunks.

Jeder vollständige Chunk enthielt

$$1.000.000 \cdot 2 = 2.000.000$$

Bit und damit

250.000

Byte Nutzdaten.

Zu jedem Chunk wurden mindestens seine laufende Nummer, der Startindex, die Zahl der enthaltenen Endwerte und der gepackte Binärblock gespeichert. Die Chunknummern reichten von

0

bis

999.

Die zugehörigen Startindizes lauteten

0, 1.000.000, 2.000.000, ..., 999.000.000.

Die Speicherung eines Chunks und die Aktualisierung des zugehörigen Fortschrittsstandes erfolgten gemeinsam. Dadurch wurde vermieden, dass ein Chunk als gespeichert gilt, ohne dass die Metadaten denselben Zustand widerspiegeln, oder umgekehrt.

9.5 Fortsetzbarkeit des Berechnungslaufs

Die blockweise Struktur erlaubte eine Fortsetzung nach einer Unterbrechung. Beim erneuten Start wurde geprüft, wie viele vollständige Chunks bereits vorhanden waren. Die Berechnung konnte danach beim ersten noch nicht gespeicherten Ausgangswert fortgesetzt werden.

Bei einem unerwarteten Abbruch konnten höchstens die Werte des aktuell noch nicht abgeschlossenen Chunks verloren gehen. Bereits vollständig gespeicherte Chunks blieben unverändert erhalten. Diese Konstruktion war für einen lang laufenden Berechnungsprozess wichtig, da ein vollständiger Neustart der Milliardenestreihe dadurch vermieden werden konnte.

9.6 Metadaten

Neben den Binärblöcken wurden Metadaten zur gesamten Testreihe gespeichert. Dazu gehörten insbesondere

$$N_{\text{Start}},$$

$$N_{\text{Ende}},$$

$$L,$$

die Chunkgröße, die Anzahl bereits berechneter Werte, der Vollständigkeitsstatus, die Codierungsversion und die vier kumulierten Klassenzähler.

Die Summe der vier Endwertzähler musste jederzeit mit der Zahl der gespeicherten Zuordnungen übereinstimmen:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_6 = L_{\text{berechnet}}.$$

Für den abgeschlossenen Lauf galt entsprechend

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_6 = 1.000.000.000.$$

9.7 Trennung von Rohdaten und Analyse

Die SQLite-Datenbank diente ausschließlich als kompakte Primärquelle der vollständigen Endwertfolge. Sämtliche statistischen Tabellen wurden nach Abschluss der Berechnung durch eigenständige Auswertungsskripte erzeugt.

Diese Trennung besitzt mehrere Vorteile. Die Rohdatenbasis bleibt unverändert. Neue Fragestellungen können untersucht werden, ohne die Abstiege erneut zu berechnen. Unterschiedliche Analyseverfahren greifen auf dieselbe validierte Decodierung zurück. Außerdem können lokale Fenstergrößen, Void-Schwellen und Musterlängen nachträglich verändert werden.

Die Datenbank selbst wird nicht als Bestandteil der Veröffentlichung bereitgestellt. Die aus ihr erzeugten maschinenlesbaren Analysetabellen werden gemeinsam als

komprimierter Zusatzdatensatz zur Zenodo-Veröffentlichung angeboten. Dieser Zusatzdatensatz umfasst die für das Paper verwendeten CSV-Auswertungen. Die zur Erzeugung und Analyse verwendeten Programme sind ebenfalls in Zenodo als ZIP-Version vorhanden.

9.8 Validierung der Datenbank

Vor der statistischen Interpretation wurde die vollständige Datenbasis technisch und inhaltlich geprüft. Die Validierung bestand aus mehreren voneinander unabhängigen Ebenen.

Zunächst wurden die Metadaten kontrolliert. Dabei wurde geprüft, ob

$$N_{\text{Ende}} = N_{\text{Start}} + L - 1$$

gilt, ob die Zahl der berechneten Werte der vorgesehenen Länge entspricht und ob die Datenbank als vollständig markiert ist.

Anschließend wurde die Chunkstruktur geprüft. Die Datenbank musste genau 1.000 Chunks enthalten. Die Chunknummern und Startindizes mussten lückenlos aufeinanderfolgen. Weder fehlende noch doppelte oder überlappende Chunks waren zulässig.

Für jeden Chunk wurde außerdem kontrolliert, ob die gespeicherte Zahl der Endwerte mit der Größe des Binärblocks vereinbar war. Allgemein musste gelten:

$$\text{Länge(BLOB)} = \left\lceil \frac{\text{Anzahl der Werte}}{4} \right\rceil.$$

Zusätzlich wurden die nicht verwendeten Paddingbits des letzten Bytes geprüft, soweit ein Chunk keine durch vier teilbare Wertanzahl besessen hätte. In der vorliegenden Haupttestreihe waren alle Chunks vollständig und enthielten genau eine Million Werte.

9.9 Vollständige Neuzählung

Die vier Klassenhäufigkeiten wurden nicht nur während der ursprünglichen Berechnung gezählt. Sämtliche eine Milliarde Zwei-Bit-Werte wurden nach Abschluss erneut aus den gespeicherten Binärblöcken decodiert und vollständig ausgezählt.

Die Neuzählung ergab:

$$A_1 = 293.421.555,$$

$$A_2 = 393.924.939,$$

$$A_3 = 194.130.342,$$

$$A_6 = 118.523.164.$$

Diese vier Werte stimmten jeweils exakt mit den in den Metadaten gespeicherten Zählern überein.

Auch ihre Summe ergab exakt die vorgesehene Gesamtmenge:

$$293.421.555 + 393.924.939 + 194.130.342 + 118.523.164 = 1.000.000.000.$$

Damit wurde bestätigt, dass alle gespeicherten Zwei-Bit-Codes eindeutig decodierbar waren und die vollständige Endwertfolge weder verlorene noch zusätzliche Einträge enthielt.

9.10 Direkte mathematische Stichprobenprüfung

Die technische Konsistenz der Binärdaten genügt allein nicht, um zu bestätigen, dass die gespeicherten Endwerte mathematisch richtig berechnet wurden. Deshalb wurde zusätzlich eine direkte Neuberechnung ausgewählter Ausgangswerte durchgeführt.

Die Stichprobe umfasste insgesamt

$$135.988$$

verschiedene Ausgangswerte. Einbezogen wurden Werte am Anfang und Ende des Gesamtbereichs, gleichmäßig über die Milliarde verteilte Werte, zufällig ausgewählte Werte sowie Werte unmittelbar an und neben Chunkgrenzen.

Für jedes ausgewählte N wurde der vollständige Dreieckszahlenabstieg erneut ausgeführt. Der neu berechnete Endwert wurde anschließend mit dem aus der Datenbank decodierten Zwei-Bit-Wert verglichen.

In der gesamten Stichprobe trat keine Abweichung auf:

$$\#\{N: E_{\text{neu}}(N) \neq E_{\text{DB}}(N)\} = 0.$$

Die Validierung bestätigt damit sowohl die technische Integrität als auch die mathematische Plausibilität der verwendeten Datenbasis. Sie ersetzt keinen formalen Beweis für jeden einzelnen gespeicherten Datensatz, bildet jedoch gemeinsam mit der vollständigen Binärneuzählung eine belastbare Grundlage für die nachfolgenden statistischen Auswertungen.

10. Globale Verteilung der Triatrad-Klassen

10.1 Absolute Klassenhäufigkeiten

Für den vollständigen Bereich

$$10 \leq N \leq 1.000.000.009$$

wurden folgende absolute Häufigkeiten ermittelt:

Triatrad-Endwert	Anzahl
1	293.421.555
2	393.924.939
3	194.130.342
6	118.523.164
Gesamt	1.000.000.000

Die Klasse $\mathcal{C}_2$ besitzt innerhalb des untersuchten Bereichs das größte Einzugsgebiet. Danach folgen $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ und $\mathcal{C}_6$.

Die Rangfolge lautet somit

$$A_2 > A_1 > A_3 > A_6.$$

Die Klasse $\mathcal{C}_6$ ist global die seltenste der vier untersuchten Endwertklassen.

10.2 Relative Klassenanteile

Die relativen Anteile ergeben sich aus

$$P_e = \frac{A_e}{1.000.000.000}.$$

Damit erhält man:

$$P_1 = 0,293421555 = 29,3421555 \%,$$

$$P_2 = 0,393924939 = 39,3924939 \%,$$

$$P_3 = 0,194130342 = 19,4130342 \%,$$

$$P_6 = 0,118523164 = 11,8523164 \%.$$

Gerundet auf sechs Nachkommastellen lautet die globale Verteilung:

Triatrad-Endwert	Anteil
1	29,342156 %

Triatrad-Endwert	Anteil
2	39,392494 %
3	19,413034 %
6	11,852316 %

Die vier Klassen sind damit deutlich ungleich gewichtet. Eine Gleichverteilung von jeweils 25 % liegt nicht vor.

10.3 Vergleich mit einer einfachen Referenzverteilung

Bereits kleinere Voruntersuchungen ließen eine grobe Nähe zur Referenzfolge

30 %, 40 %, 20 %, 10 %

für die Klassen

1, 2, 3, 6

erkennen.

Diese Referenz entspricht dem Verhältnis

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_6 \approx 3 : 4 : 2 : 1.$$

Für eine Milliarde Werte würde diese Referenz folgende Anzahlen liefern:

Endwert	Referenzanzahl	Gemessene Anzahl	Abweichung
1	300.000.000	293.421.555	−6.578.445
2	400.000.000	393.924.939	−6.075.061
3	200.000.000	194.130.342	−5.869.658
6	100.000.000	118.523.164	+18.523.164

Die negativen Abweichungen der Klassen 1, 2 und 3 summieren sich zu

$$6.578.445 + 6.075.061 + 5.869.658 = 18.523.164.$$

Dieser Betrag entspricht exakt dem Überschuss der Klasse 6 gegenüber der gewählten Referenz.

Die gemessene Verteilung liegt somit in der Nähe von

$$3 : 4 : 2 : 1,$$

weist jedoch eine systematische Verschiebung zugunsten der Klasse 6 auf. Diese Referenz ist zunächst nur eine deskriptive Vergleichsgröße. Aus ihr folgt kein bewiesenes Verteilungsgesetz.

10.4 Zusammengefasste Haupt- und Nebenklassen

Die beiden häufigsten Klassen 1 und 2 besitzen gemeinsam den Anteil

$$P_1 + P_2 = 29,3421555 \% + 39,3924939 \% = 68,7346494 \%$$

Die Klassen 3 und 6 ergeben gemeinsam

$$P_3 + P_6 = 19,4130342 \% + 11,8523164 \% = 31,2653506 \%$$

Damit entfallen im untersuchten Bereich mehr als zwei Drittel aller natürlichen Werte auf die beiden Bäume mit den Wurzeln 1 und 2.

Diese Zusammenfassung darf jedoch nicht als Beleg für eine algebraisch begründete Zweiteilung verstanden werden. Sie beschreibt zunächst nur die beobachteten Gesamtgewichte. Die späteren lokalen Auswertungen zeigen zudem, dass diese globalen Anteile erhebliche regionale Verschiebungen verdecken.

10.5 Globale Stabilität und lokale Veränderlichkeit

Die kumulativen Verteilungen während der Berechnung blieben über große Teile des untersuchten Bereichs in derselben groben Größenordnung. Insbesondere blieb die Rangfolge

$$2 > 1 > 3 > 6$$

global erhalten.

Eine annähernd stabile kumulative Verteilung bedeutet jedoch nicht, dass jede Teilstrecke ähnliche Anteile besitzen muss. Die Gesamtwerte entstehen aus der Zusammenfassung sehr unterschiedlicher lokaler Zustände.

Ein Bereich kann beispielsweise vollständig frei von der Klasse 6 sein, während ein anderer Bereich einen überdurchschnittlich hohen Anteil dieser Klasse besitzt. In der kumulativen Gesamtverteilung können sich solche Gebiete teilweise gegenseitig ausgleichen.

Die globale Häufigkeit beantwortet daher die Frage:

Wie viele Werte gehören insgesamt zu jeder Klasse?

Sie beantwortet nicht:

Wie sind diese Werte entlang der Zahlenachse angeordnet?

Diese zweite Frage erfordert die Untersuchung lokaler Blockverteilungen, benachbarter Endwerte und klassenfreier Intervalle.

11. Reihenfolge und Nachbarschaft der Endwerte

11.1 Die Endwertfolge

Die vollständige Datenbasis kann als Folge

$$\mathcal{E} = (E(10), E(11), E(12), \dots, E(1.000.000.009))$$

aufgefasst werden.

Jedes Folgenglied gehört zum Alphabet

$$\{1, 2, 3, 6\}.$$

Die globale Häufigkeit beschreibt lediglich, wie oft jedes Symbol in dieser Folge vorkommt. Um die innere Anordnung zu erfassen, müssen zusätzlich benachbarte Paare und längere Klassenwörter untersucht werden.

Für zwei Endwerte $a, b \in \mathcal{T}$ wird die Übergangszahl definiert durch

$$M_{ab} = \#\{N: E(N) = a, E(N + 1) = b\}.$$

Die vollständigen Übergangszahlen bilden eine Matrix

$$M = (M_{ab})_{a,b \in \mathcal{T}}.$$

Da vier Klassen existieren, enthält diese Matrix insgesamt

$$4^2 = 16$$

mögliche gerichtete Übergänge.

11.2 Gerichtete Übergänge

Die empirische Untersuchung zeigt, dass die Übergänge nicht allein durch die globalen Klassengewichte erklärt werden können. Bestimmte Übergänge treten wesentlich häufiger auf als andere. Außerdem sind die gerichteten Beziehungen im Allgemeinen nicht symmetrisch.

Das bedeutet, dass aus einer hohen Häufigkeit von

$$a \rightarrow b$$

nicht automatisch eine ähnlich hohe Häufigkeit von

$$b \rightarrow a$$

folgt.

Die Triatrad-Folge besitzt damit eine gerichtete lokale Struktur. Die Klasse eines Wertes enthält messbare Information über die wahrscheinliche Klasse seines unmittelbaren Nachbarn.

Eine statistisch unabhängige Folge mit denselben globalen Häufigkeiten würde für einen Übergang $a \rightarrow b$ näherungsweise die Wahrscheinlichkeit

$$P(E(N+1) = b \mid E(N) = a) \approx P_b$$

erwarten lassen.

Die beobachteten Übergangswahrscheinlichkeiten weichen jedoch teilweise deutlich von dieser Referenz ab. Dies zeigt, dass die Endwerte aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht als unabhängige Ziehungen aus einer festen Vierklassenverteilung beschrieben werden können.

11.3 Funktionelle Unterschiede der vier Klassen

Die Übergangsanalyse deutet darauf hin, dass die vier Klassen innerhalb der lokalen Folge unterschiedliche Rollen besitzen.

Die Klasse 2 tritt häufig als Verteilungs- oder Übergangsklasse auf. Von ihr führen auffällige Übergänge sowohl zur Klasse 3 als auch zur Klasse 6.

Die Klasse 1 erscheint besonders häufig als unmittelbare Folge der Klasse 6. Die Klasse 6 kehrt somit nach ihrem Auftreten bevorzugt in den Bereich der Klasse 1 zurück.

Die Klassen 3 und 6 zeigen dagegen nur eine geringe Tendenz, unmittelbar auf sich selbst zu folgen. Lange gleichartige Folgen dieser beiden Klassen sind daher deutlich seltener als entsprechende Folgen der Klassen 1 oder 2.

Diese Unterschiede zeigen, dass die vier Endwerte nicht lediglich vier austauschbare Etiketten darstellen. Ihre Positionen in der Endwertfolge besitzen jeweils eine eigene lokale Übergangscharakteristik.

11.4 Folgen gleicher Endwerte

Für jedes $e \in \mathcal{T}$ kann eine Lauflänge als maximale Folge aufeinanderfolgender Werte definiert werden, für die

$$E(N) = E(N + 1) = \dots = E(N + \ell - 1) = e$$

gilt.

Die Zahl ℓ ist die Länge dieses Laufs.

Die Häufigkeit und maximale Länge solcher Läufe unterscheiden sich zwischen den vier Klassen. Besonders die geringe Selbstnachbarschaft der Klassen 3 und 6 begrenzt deren zusammenhängende Läufe.

Die Analyse der Lauflängen ergänzt die Void-Untersuchung. Ein Lauf beschreibt eine lokale Konzentration einer Klasse. Ein Void beschreibt dagegen ihre vollständige Abwesenheit.

Damit stehen zwei entgegengesetzte Kenngrößen zur Verfügung:

maximale lokale Anwesenheit

und

maximale lokale Abwesenheit.

11.5 Kurze Klassenwörter

Neben Paaren wurden auch Folgen der Längen drei und vier untersucht. Für eine Wortlänge k existieren theoretisch

$$4^k$$

mögliche Klassenwörter.

Damit ergeben sich

$$4^2 = 16,$$

$$4^3 = 64$$

und

$$4^4 = 256$$

mögliche Wörter der Längen zwei, drei und vier.

Die Häufigkeitsverteilungen dieser Wörter sind stark ungleich. Bestimmte Folgen treten bevorzugt auf, während andere selten oder innerhalb bestimmter lokaler Regime vollständig ausgeschlossen sein können.

Besonders auffällig sind zyklusähnliche Übergangsfolgen der Formen

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Diese Folgen sind nicht als periodische Gesetze für die gesamte Endwertfolge zu verstehen. Sie beschreiben jedoch bevorzugte lokale Übergangsrichtungen, die in der Häufigkeit kurzer Klassenwörter sichtbar werden.

11.6 Bedeutung der Reihenfolgenanalyse

Die Analyse der Endwertreihenfolge liefert einen ersten Hinweis darauf, dass die Vierbaumzerlegung nicht nur global ungleich gewichtet, sondern auch lokal organisiert ist.

Die gemessene Folge besitzt zugleich:

ungleiche Klassenanteile,

gerichtete Nachbarschaftsbeziehungen,

klassenspezifische Lauflängen

und

bevorzugte kurze Klassenwörter.

Diese Eigenschaften sprechen gegen die Vorstellung, dass die Endwertfunktion entlang der natürlichen Zahlen lediglich ein unstrukturiertes vierwertiges Rauschen erzeugt. Die stärkste Abweichung von einer solchen Vorstellung zeigt sich jedoch in den ausgedehnten klassenfreien Intervallen der Klasse 6. Diese werden im folgenden Kapitel untersucht.

12. Die 6-Voids

12.1 Definition eines Klassenvoids

Sei $e \in \mathcal{T}$ ein Triatrad-Endwert. Ein e -Void ist ein maximales zusammenhängendes Intervall

$$[a, b] \subset \mathbb{N}_{>0},$$

für das

$$E(N) \neq e$$

für alle

$$a \leq N \leq b$$

gilt.

Die Maximalität bedeutet, dass unmittelbar vor und nach dem Intervall, soweit diese Werte innerhalb des untersuchten Gesamtbereichs liegen, wieder ein Vertreter der Klasse e auftritt:

$$E(a - 1) = e$$

und

$$E(b + 1) = e.$$

Die Länge des Voids wird definiert durch

$$V_e(a, b) = b - a + 1.$$

Ein Void misst damit nicht die globale Seltenheit einer Klasse, sondern ihre maximale zusammenhängende Abwesenheit innerhalb eines bestimmten Zahlenbereichs.

Diese Unterscheidung ist wesentlich. Die globale Häufigkeit

$$P_e(A, B) = \frac{\#\{N \in [A, B]: E(N) = e\}}{B - A + 1}$$

beantwortet die Frage, wie viele Werte eines Intervalls zur Klasse e gehören. Die Void-Länge beantwortet dagegen die Frage, wie diese Werte räumlich entlang der Zahlenachse angeordnet sind.

Zwei Endwertfolgen können dieselben globalen Klassenhäufigkeiten besitzen und dennoch vollkommen unterschiedliche Void-Strukturen aufweisen. Eine regelmäßig

verteilte Klasse kann nur kurze Lücken besitzen. Dieselbe Zahl von Klassentreffern kann bei starker Bündelung sehr lange klassenfreie Intervalle erzeugen.

12.2 Voids als Strukturmaß

Für eine Klasse e und eine obere Untersuchungsgrenze X kann die maximale Void-Länge durch

$$M_e(X) = \max\{V_e(a, b) : 1 \leq a \leq b \leq X\}$$

beschrieben werden.

Die Größe $M_e(X)$ ist eine eigenständige Kenngröße der Endwertfolge. Sie kann nicht unmittelbar aus dem Gesamtanteil $P_e(1, X)$ abgeleitet werden.

Für eine annähernd unabhängige Zufallsfolge mit Klassenwahrscheinlichkeit p_e würde die Wahrscheinlichkeit eines e -freien Intervalls der Länge L näherungsweise

$$(1 - p_e)^L$$

betragen.

Für die Klasse 6 wurde innerhalb der Milliardenestreihe ein globaler Anteil von

$$p_6 = 0,118523164$$

gemessen. Bei einer unabhängigen Verteilung mit diesem Anteil wären bereits Voids von einigen hundert Positionen außerordentlich selten. Die tatsächlich beobachteten 6-Voids erreichen dagegen Längen von mehreren Millionen bis über 34 Millionen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

Die Void-Struktur der Klasse 6 kann daher nicht als unmittelbare Folge ihrer geringeren globalen Häufigkeit verstanden werden.

12.3 Erster großräumiger 6-Void

Eine frühe Teiluntersuchung des Bereichs

$$100.000.000 \leq N \leq 100.999.999$$

ergab keinen einzigen Wert mit dem Endwert 6.

Die Verteilung dieses Millionenblocks lautete:

$$\begin{aligned}
E(N) &= 1: 369.438, \\
E(N) &= 2: 328.977, \\
E(N) &= 3: 301.585, \\
E(N) &= 6: 0.
\end{aligned}$$

Damit ergaben sich die Anteile

$$\begin{aligned}
P_1 &= 36,9438 \%, \\
P_2 &= 32,8977 \%, \\
P_3 &= 30,1585 \%, \\
P_6 &= 0 \%.
\end{aligned}$$

Die spätere exakte Void-Analyse zeigte, dass dieser Millionenblock nur einen Teil eines erheblich größeren zusammenhängenden 6-freien Intervalls bildete.

Der letzte Wert vor diesem Bereich mit

$$E(N) = 6$$

war

$$97.947.567.$$

Der nächste Wert mit Endwert 6 war

$$102.234.133.$$

Somit bestand der maximale 6-freie Bereich

$$97.947.568 \leq N \leq 102.234.132.$$

Seine Länge betrug

$$102.234.132 - 97.947.568 + 1 = 4.286.565.$$

Dieser Befund war der erste deutliche Hinweis darauf, dass die Klasse 6 großräumige Ausschlusszonen besitzt.

12.4 Die zehn größten 6-Voids

Die vollständige Analyse der Milliarden Datenbank ergab folgende zehn größte 6-Voids:

Rang	Beginn des Voids	Void-Länge
1	783.765.283	34.147.153
2	391.863.277	17.083.459
3	195.912.571	8.559.412
4	97.947.568	4.286.565
5	48.967.315	2.145.602

Rang	Beginn des Voids	Void-Länge
6	24.477.814	1.077.428
7	12.233.988	542.214
8	6.114.237	273.440
9	3.055.136	138.413
10	1.526.510	69.461

Die Längen bilden keine unregelmäßige Folge voneinander unabhängiger Extremwerte. Sie zeigen eine auffällige annähernde Verdopplungsstruktur.

Für die größten Voids gilt beispielsweise:

$$34.147.153 \approx 2 \cdot 17.083.459,$$

$$17.083.459 \approx 2 \cdot 8.559.412,$$

$$8.559.412 \approx 2 \cdot 4.286.565,$$

$$4.286.565 \approx 2 \cdot 2.145.602.$$

Auch die Beginnpunkte der Voids wachsen näherungsweise durch Verdopplung:

$$1.526.510, \quad 3.055.136, \quad 6.114.237, \quad 12.233.988, \quad 24.477.814,$$

$$48.967.315, \quad 97.947.568, \quad 195.912.571, \quad 391.863.277, \quad 783.765.283.$$

Diese Folge legt nahe, dass die großen 6-Voids nicht lediglich zufällig auftretende Extremabstände darstellen. Sie scheinen zu einer skalierenden Familie von Zahlenbereichen zu gehören.

12.5 Annähernde Verdopplungsleiter

Bezeichne die nach wachsender Größe geordneten großen 6-Voids mit

$$V_1, V_2, \dots, V_{10},$$

wobei V_1 der kleinste und V_{10} der größte der dargestellten Voids sei.

Dann gilt näherungsweise

$$V_{k+1} \approx 2V_k.$$

Die Quotienten sind nicht exakt gleich 2. Sie liegen jedoch über mehrere aufeinanderfolgende Größenordnungen sehr nahe an einer Verdopplung.

Die Abweichung von einer exakten Potenzfolge ist mathematisch ebenso bedeutsam wie die grobe Skalierung. Sie zeigt, dass die Void-Grenzen nicht durch ein triviales Schema der Form

$$a_k = c \cdot 2^k$$

gegeben sind. Dennoch scheint eine Verdopplungsdynamik den großräumigen Verlauf zu bestimmen.

Eine mögliche deskriptive Form lautet daher:

$$V_k = c_k 2^k,$$

wobei die Korrekturfaktoren c_k nur langsam variieren.

Eine solche Darstellung ist bislang keine hergeleitete Formel. Sie beschreibt die empirische Struktur der zehn größten innerhalb der Milliarde beobachteten 6-Voids.

12.6 Wachstum der Void-Längen

Die größte beobachtete Void-Länge

$$34.147.153$$

ist ungefähr doppelt so groß wie die zweitgrößte und ungefähr achtmal so groß wie der bei etwa 10^8 beobachtete Void von

$$4.286.565.$$

Zugleich verschieben sich die Void-Lagen in annähernd verdoppelnde Zahlenbereiche.

Dieser Befund führt zu einer wichtigen offenen Frage:

Wachsen die maximalen 6-Voids mit N unbeschränkt?

Die bisherige Datenbasis reicht nur bis etwa

$$10^9.$$

Sie zeigt innerhalb dieses Bereichs eine deutliche Wachstumstendenz. Daraus folgt jedoch noch kein Beweis für unbeschränktes Wachstum.

Eine mögliche asymptotische Fragestellung lautet:

$$\limsup_{X \rightarrow \infty} M_6(X) = \infty?$$

Eine stärkere Frage wäre, ob die maximalen Void-Längen entlang bestimmter Folgen annähernd proportional zur Lage ihrer Intervalle wachsen.

Für den k -ten großen Void könnte hierzu das Verhältnis

$$R_k = \frac{V_k}{a_k}$$

betrachtet werden, wobei a_k der Beginn des Voids ist. Eine mögliche Konstanz oder langsame Veränderung dieses Verhältnisses würde auf eine skalierende geometrische Struktur hinweisen.

12.7 Abgrenzung von Häufigkeit und Void-Geometrie

Die Klasse 6 ist mit

$$11,8523164 \%$$

global die seltenste Klasse. Dieser Umstand erklärt, warum ihre durchschnittlichen Abstände größer sein können als jene der häufigeren Klassen.

Er erklärt jedoch nicht die beobachtete Größenordnung der Voids.

Bei einer annähernd unabhängigen Verteilung würde die durchschnittliche Distanz zwischen zwei Treffern der Klasse 6 in der Größenordnung

$$\frac{1}{p_6} \approx 8,44$$

liegen.

Dem steht ein maximaler beobachteter Void von

$$34.147.153$$

gegenüber.

Der größte 6-Void ist damit mehr als vier Millionen Mal so lang wie der aus der globalen Häufigkeit folgende mittlere Trefferabstand.

Dieses Verhältnis ist kein formaler Signifikanztest, verdeutlicht jedoch die Größenordnung der Abweichung zwischen globaler Dichte und lokaler Anordnung.

Die Klasse 6 ist deshalb nicht nur seltener als die übrigen Klassen. Sie besitzt eine eigenständige räumliche Geometrie.

12.8 Vergleich mit den übrigen Triatrad-Klassen

Auch die Klassen 1, 2 und 3 besitzen Voids. Ihre maximalen Lücken bleiben innerhalb des untersuchten Bereichs jedoch um viele Größenordnungen kleiner als jene der Klasse 6.

Besonders markant ist der Vergleich zwischen den maximalen Voids der Klassen 3 und 6. Die Auswertung ergab näherungsweise

$$V_6^{\max} \approx 1.138.238 \cdot V_3^{\max}.$$

Der größte 6-Void ist damit mehr als eine Million Mal länger als der größte Void der Klasse 3.

Dieser Unterschied kann nicht allein daraus erklärt werden, dass die Klasse 6 etwas seltener ist als die Klasse 3. Ihre globalen Anteile unterscheiden sich nur um den Faktor

$$\frac{P_3}{P_6} = \frac{0,194130342}{0,118523164} \approx 1,64.$$

Die maximalen Void-Längen unterscheiden sich dagegen um mehr als sechs Größenordnungen.

Somit besitzt die Klasse 6 nicht nur quantitativ, sondern qualitativ eine andere Lückenstruktur.

12.9 Voids als deterministische Ausschlussbereiche

Da die Endwertfolge vollständig deterministisch aus N hervorgeht, ist jeder Void ebenfalls deterministisch erzeugt.

Ein 6-Void

$$[a, b]$$

bedeutet, dass für jeden Wert des gesamten Intervalls

$$E(N) \in \{1, 2, 3\}$$

gilt.

Damit fehlt innerhalb dieses Bereichs ein vollständiger terminaler Baum der Vierbaumzerlegung. Die lokal erreichbare Terminalmenge reduziert sich von

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}$$

auf

$$\mathcal{T}_{[a, b]} = \{1, 2, 3\}.$$

Die Aussage betrifft nicht die globale Möglichkeit des Endwertes 6. Sie betrifft die lokale Lage seines Einzugsgebietes entlang der natürlichen Zahlen.

Ein großer 6-Void kann daher als lokaler Ausschlussbereich des Baumes $\mathcal{C}_6$ verstanden werden.

Ob diese Ausschlussbereiche durch eine einfache arithmetische Ungleichung, durch bestimmte Intervallabbildungen des Operators oder durch eine weiter zurückliegende Rückwärtsbaumstruktur beschrieben werden können, bleibt offen.

13. Verteilungsregime der großen 6-Voids

13.1 Der Void als mehr als eine Nullzone

Ein Void könnte im einfachsten Fall ein isoliertes Intervall sein, in dem eine Klasse plötzlich nicht mehr erscheint, während die übrige Klassenverteilung außerhalb weitgehend unverändert bleibt.

Die Analyse der großen 6-Voids zeigt jedoch ein anderes Bild. Die Verteilung der Klassen 1, 2 und 3 verändert sich bereits vor dem eigentlichen Void. Innerhalb des Voids stellt sich ein deutlich anderes Verteilungsregime ein. Nach dem letzten 6-freien Wert kehrt die ursprüngliche Verteilung nicht sofort zurück.

Der Void besitzt damit drei dynamisch unterscheidbare Bereiche:

Vorzone,

Nullzone,

Nachzone.

Diese Bereiche wurden durch feste Randfenster um die großen 6-Voids untersucht. Überschneidende Intervalle wurden vereinigt, damit kein natürlicher Wert mehrfach verschiedenen Regionen zugeordnet wurde.

13.2 Verteilung außerhalb der großen 6-Voids

Als außerhalb liegend wurden jene Teile des Gesamtbereichs behandelt, die weder zu einem ausgewählten großen Void noch zu dessen unmittelbaren Randzonen gehörten. Dieser Außenbereich umfasste

928.539.060

Werte.

Dort ergab sich folgende Verteilung:

$E(N) = 1: 266.868.055,$

$E(N) = 2: 371.022.383,$

$E(N) = 3: 172.183.032,$

$E(N) = 6: 118.465.590.$

Die relativen Anteile lauteten:

$$\begin{aligned}
P_1^{\text{außen}} &= 28,740638547 \%, \\
P_2^{\text{außen}} &= 39,957649493 \%, \\
P_3^{\text{außen}} &= 18,543434457 \%, \\
P_6^{\text{außen}} &= 12,758277503 \%.
\end{aligned}$$

Diese Werte bilden das empirische Vergleichsregime für die Void- und Randzonen. Außerhalb der großen Voids ist die Klasse 2 mit knapp 40 % deutlich dominant. Die Klasse 6 besitzt dort einen Anteil von etwa 12,76 % und liegt damit sogar über ihrem globalen Milliarden Durchschnitt.

13.3 Verteilung innerhalb der großen 6-Voids

Innerhalb der untersuchten großen 6-Voids gilt definitionsgemäß

$$P_6^{\text{Void}} = 0.$$

Die übrige Masse verteilt sich jedoch nicht proportional zu ihren Außenanteilen auf die Klassen 1, 2 und 3.

Innerhalb der Voids wurde näherungsweise folgende Verteilung ermittelt:

$$\begin{aligned}
P_1^{\text{Void}} &\approx 37,24 \%, \\
P_2^{\text{Void}} &\approx 31,99 \%, \\
P_3^{\text{Void}} &\approx 30,77 \%, \\
P_6^{\text{Void}} &= 0 \%.
\end{aligned}$$

Gegenüber dem Außenbereich ergeben sich damit ungefähr folgende Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
\Delta P_1 &\approx +8,50 \text{ Prozentpunkte}, \\
\Delta P_2 &\approx -7,97 \text{ Prozentpunkte}, \\
\Delta P_3 &\approx +12,23 \text{ Prozentpunkte}, \\
\Delta P_6 &\approx -12,76 \text{ Prozentpunkte}.
\end{aligned}$$

Die fehlende Klasse 6 wird demnach nicht gleichmäßig auf die drei verbleibenden Klassen verteilt. Den größten relativen und absoluten Zuwachs erhält die Klasse 3.

Die Klasse 3 steigt von

$$18,54 \%$$

außerhalb auf ungefähr

$$30,77 \%$$

innerhalb der Voids.

Damit nimmt ihr Anteil um ungefähr zwei Drittel gegenüber dem Außenwert zu.

Die Klasse 1 wächst ebenfalls deutlich. Die Klasse 2 verliert dagegen trotz des vollständigen Verschwindens der Klasse 6 an Anteil.

Der Void ist daher kein bloßer Zustand

$$P_6 = 0.$$

Er ist ein vollständiges alternatives Verteilungsregime:

$$6 \downarrow 0, \quad 3 \uparrow\uparrow, \quad 1 \uparrow, \quad 2 \downarrow.$$

13.4 Die Vorzone

Für die Vorzonen der untersuchten großen Voids wurden insgesamt

$$1.529.899$$

Werte ausgewertet.

Die Verteilung lautete:

$$E(N) = 1: 545.778,$$

$$E(N) = 2: 495.311,$$

$$E(N) = 3: 467.726,$$

$$E(N) = 6: 21.084.$$

Daraus ergaben sich die Anteile:

$$P_1^{\text{vor}} = 35,674119664 \%,$$

$$P_2^{\text{vor}} = 32,375405174 \%,$$

$$P_3^{\text{vor}} = 30,572344972 \%,$$

$$P_6^{\text{vor}} = 1,378130190 \, \%.$$

Die Vorzone liegt damit bereits sehr nahe am inneren Void-Regime.

Die Klasse 6 ist zwar noch vorhanden, ihr Anteil ist jedoch von etwa

$$12,76 \, \%$$

außerhalb auf nur noch

$$1,38 \, \%$$

gesunken.

Gleichzeitig besitzt die Klasse 3 bereits einen Anteil von

$$30,57 \, \%,$$

der nahezu dem inneren Void-Anteil entspricht.

Die Umverteilung beginnt daher nicht erst am ersten vollständig 6-freien Wert. Der Void besitzt eine echte Vorzone, in der sich sein Verteilungszustand bereits aufbaut.

13.5 Die Nachzone

Für die Nachzonen wurden

1.200.000

Werte ausgewertet.

Die Klassenhäufigkeiten lauteten:

$$E(N) = 1: 411.935,$$

$$E(N) = 2: 422.270,$$

$$E(N) = 3: 329.305,$$

$$E(N) = 6: 36.490.$$

Die relativen Anteile ergaben:

$$p_1^{\text{nach}} = 34,327916667 \%,$$

$$p_2^{\text{nach}} = 35,189166667 \%,$$

$$p_3^{\text{nach}} = 27,442083333 \%,$$

$$p_6^{\text{nach}} = 3,040833333 \%.$$

Die Klasse 6 ist nach dem Void wieder vorhanden, erreicht jedoch mit etwa

3,04 %

noch lange nicht das Außenniveau von

12,76 %.

Auch die Klasse 3 bleibt mit

27,44 %

deutlich erhöht.

Die Nachzone zeigt daher, dass der Void nicht dynamisch am letzten 6-freien Wert endet. Die Klassenverteilung benötigt eine zusätzliche Strecke, um sich wieder dem Außenregime anzunähern.

13.6 Asymmetrie von Eintritt und Austritt

Die Vor- und Nachzonen sind nicht spiegelbildlich.

Vor dem Void beträgt der Anteil der Klasse 6

1,3781 %.

Nach dem Void beträgt er

3,0408 %.

Die Klasse 6 kehrt damit unmittelbar nach dem Void zunächst stärker zurück, als sie unmittelbar vor dem Void noch vorhanden war.

Auch die übrigen Klassenanteile zeigen unterschiedliche Übergangsformen. Vor dem Void ist der Anteil der Klasse 3 mit

30,57 %

bereits fast auf dem inneren Void-Niveau. Nach dem Void ist er mit

27,44 %

schon weiter in Richtung des Außenwertes zurückgegangen.

Die beobachtete Form lässt sich deshalb näherungsweise beschreiben als

langsames Auslaufen der Klasse 6

gefolgt von

vollständiger Nullzone

und anschließend

beginnender, aber verzögerter Rückkehr.

Der Verlauf ist damit asymmetrisch.

13.7 Regionale Verteilungsübersicht

Die vier untersuchten Regime lassen sich zusammenfassen:

Region	Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3	Klasse 6
Außerhalb	28,7406 %	39,9576 %	18,5434 %	12,7583 %
Vorzone	35,6741 %	32,3754 %	30,5723 %	1,3781 %
Void	ca. 37,24 %	ca. 31,99 %	ca. 30,77 %	0 %
Nachzone	34,3279 %	35,1892 %	27,4421 %	3,0408 %

Die Tabelle zeigt einen kontinuierlichen Übergang zwischen zwei deutlich verschiedenen Zuständen.

Das Außenregime ist durch die Dominanz der Klasse 2 gekennzeichnet:

$2 > 1 > 3 > 6.$

Das Void-Regime besitzt dagegen die Rangfolge

$$1 > 2 \approx 3 > 6,$$

wobei die Klassen 2 und 3 wesentlich näher beieinanderliegen und die Klasse 6 vollständig fehlt.

Die Vor- und Nachzonen bilden Übergangszustände zwischen diesen beiden Regimen.

13.8 Umverteilung der fehlenden Klasse 6

Es wäre naheliegend anzunehmen, dass beim Verschwinden der Klasse 6 deren Anteil hauptsächlich an die global häufigste Klasse 2 übergeht.

Das Gegenteil ist der Fall.

Die Klasse 2 verliert innerhalb der Voids gegenüber dem Außenbereich etwa

$$7,97$$

Prozentpunkte.

Die Klasse 3 gewinnt etwa

$$12,23$$

Prozentpunkte und übernimmt damit den größten Teil der Umverteilung.

Die Klasse 1 gewinnt etwa

$$8,50$$

Prozentpunkte.

Die Summe dieser beiden Gewinne beträgt ungefähr

$$20,73$$

Prozentpunkte. Davon werden der vollständige Verlust der Klasse 6 und der zusätzliche Verlust der Klasse 2 ausgeglichen.

Formal gilt näherungsweise:

$$\Delta P_1 + \Delta P_3 = -\Delta P_2 - \Delta P_6.$$

Die Void-Dynamik ist damit durch eine gekoppelte Verschiebung gekennzeichnet:

$$(2,6) \rightarrow (1,3).$$

Dies bedeutet nicht, dass einzelne Werte unmittelbar paarweise von einer Klasse in eine andere umgeordnet werden. Die Gleichung beschreibt die Veränderung der lokalen Klassengewichte des gesamten Regimes.

13.9 Übergangsstruktur innerhalb der Void-Regime

Die Analyse benachbarter Endwerte zeigt, dass sich innerhalb der großen Voids nicht nur die Klassenanteile, sondern auch die Übergangswahrscheinlichkeiten verändern. Außerhalb der Voids treten unter anderem bevorzugte Strukturen auf, die näherungsweise durch

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

beschrieben werden können.

Vor einem großen 6-Void bricht insbesondere der Übergang

$$2 \rightarrow 6$$

bereits stark ein, obwohl die Klasse 6 noch nicht vollständig verschwunden ist.

Innerhalb des Voids ist dieser Übergang definitionsgemäß unmöglich. Gleichzeitig gewinnt die Folge

$$2 \rightarrow 3$$

an Bedeutung.

Das lokale Regime verschiebt sich damit stärker in Richtung

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

mit zusätzlichem Zulauf über

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Nach dem Void kehrt die Klasse 6 zurück, jedoch zunächst mit einer anderen Übergangsstruktur als im Außenbereich. Der Übergang von 6 zu 2 ist in der unmittelbaren Nachzone vorübergehend stärker ausgeprägt, während der Übergang von 2 zu 6 noch deutlich unter seinem Außenniveau bleibt.

Dies zeigt, dass der Void nicht nur ein Dichtedefizit, sondern ein verändertes lokales Übergangssystem darstellt.

13.10 Der Void als eigenständiges Verteilungsregime

Die kombinierten Ergebnisse aus Dichte-, Randzonen- und Übergangsanalyse führen zu einer stärkeren Interpretation der 6-Voids.

Ein großer 6-Void ist nicht lediglich ein Intervall, in dem zufällig kein Wert der Klasse $\mathcal{C}_6$ erscheint.

Er ist ein zusammenhängender Zahlenbereich mit einer eigenen Verteilungs- und Übergangsstruktur.

Charakteristisch sind:

$$P_6 \rightarrow 0,$$

P_3 steigt stark,

P_1 steigt,

P_2 sinkt,

sowie eine Veränderung der bevorzugten Übergänge zwischen benachbarten Endwerten.

Die Vorzone zeigt, dass sich dieses Regime bereits vor dem vollständigen Void aufbaut. Die Nachzone zeigt, dass es nach dem Void nur allmählich wieder abklingt.

Die großen 6-Voids bilden daher eigenständige lokale Verteilungsregime innerhalb der globalen Triatrad-Folge.

14. Vertiefende Analyse der Klassenwörter

14.1 Konzentration der Dreiermuster

Die Untersuchung aller aufeinanderfolgenden Dreierfenster bestätigt die bereits aus der Übergangsmatrix erkennbare gerichtete Ordnung. Unter den

$$4^3 = 64$$

möglichen Dreiermustern treten zwar alle Kombinationen mindestens einmal auf, ihre Häufigkeiten unterscheiden sich jedoch um mehrere Größenordnungen.

Die fünf häufigsten Dreiermuster lauten:

Rang	Dreiermuster	Häufigkeit
1	$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	107.311.563
2	$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	104.719.119
3	$6 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	98.777.411
4	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$	97.032.739
5	$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$	88.489.725

Diese fünf Muster umfassen gemeinsam ungefähr

$$49,63 \%$$

aller Dreierfenster. Die zehn häufigsten Muster erreichen zusammen etwa

$$75,93 \%.$$

Drei Viertel aller lokalen Folgen der Länge drei konzentrieren sich somit auf nur zehn der insgesamt 64 möglichen Muster. Eine annähernd gleichmäßige Verteilung der Dreierwörter liegt nicht vor.

Die hohe Konzentration bestätigt, dass die Triatrad-Folge eine ausgeprägte lokale Grammatik besitzt. Ein großer Teil der Folge wird durch wenige bevorzugte Übergangsketten beschrieben.

14.2 Zwei dominante Grundschleifen

Die häufigsten Dreiermuster lassen sich überwiegend zwei gerichteten Kreisläufen zuordnen:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Der erste Kreislauf erzeugt die verschobenen Dreierfenster

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3,$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2.$$

Der zweite Kreislauf erzeugt entsprechend

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6,$$

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

und

$$6 \rightarrow 1 \rightarrow 2.$$

Fast alle diese sechs Dreierfolgen gehören zu den häufigsten Mustern der gesamten Milliardenestreihe.

Die lokale Grundbewegung kann daher schematisch dargestellt werden als

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \begin{Bmatrix} 3, \\ 6 \end{Bmatrix} \rightarrow 1.$$

Innerhalb dieses Schemas übernimmt die Klasse 2 die Rolle eines Verzweigungspunktes. Von ihr aus führt die Folge bevorzugt entweder zur Klasse 3 oder zur Klasse 6. Beide Zweige kehren anschließend bevorzugt zur Klasse 1 zurück, von der aus wiederum häufig die Klasse 2 folgt.

Diese Darstellung ist keine ausnahmslose Übergangsregel. Sämtliche Dreiermuster kommen grundsätzlich vor. Sie beschreibt jedoch die statistisch dominierende lokale Bewegungsform.

14.3 Seltene Dreiermuster

Das häufigste Dreiermuster

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

tritt

$$107.311.563$$

Mal auf.

Das seltenste Dreiermuster

$$3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$$

tritt dagegen nur

24

Mal auf.

Das Verhältnis beträgt

$$\frac{107.311.563}{24} \approx 4.471.315.$$

Das häufigste Dreierwort ist somit etwa 4,47 Millionen Mal häufiger als das seltenste.

Zu den fünf seltensten Dreiermustern gehören:

Dreiermuster	Häufigkeit
--------------	------------

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$	24
---------------------------------	----

$6 \rightarrow 3 \rightarrow 6$	45
---------------------------------	----

$3 \rightarrow 3 \rightarrow 6$	263
---------------------------------	-----

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 2$	1.062
---------------------------------	-------

$6 \rightarrow 3 \rightarrow 3$	1.104
---------------------------------	-------

Sämtliche dieser besonders seltenen Muster enthalten eine unmittelbare enge Verbindung zwischen den Klassen 3 und 6.

Damit ergibt sich ein auffälliger Gegensatz. In großräumigen Blockverteilungen scheinen sich die Klassen 3 und 6 teilweise gegenseitig zu ersetzen. In den großen 6-Voids steigt insbesondere der Anteil der Klasse 3 stark an. Lokal stehen 3 und 6 jedoch nur äußerst selten unmittelbar nebeneinander.

Die beiden Klassen sind daher großräumig gekoppelt, aber lokal weitgehend getrennt.

14.4 Wiederholungsmuster

Auch reine Wiederholungsmuster unterscheiden sich erheblich zwischen den vier Klassen.

Für Dreierwiederholungen wurden folgende Häufigkeiten ermittelt:

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1: \quad 3.654,$$

$$2 \rightarrow 2 \rightarrow 2: \quad 19.443.087,$$

$3 \rightarrow 3 \rightarrow 3$: 2.430,

$6 \rightarrow 6 \rightarrow 6$: 87.215.

Die Klasse 2 besitzt damit eine sehr starke Tendenz zur Bildung kurzer gleichartiger Folgen. Die Klassen 1 und 3 treten dagegen trotz ihrer erheblichen globalen Häufigkeiten nur äußerst selten dreimal unmittelbar hintereinander auf.

Bemerkenswert ist auch die Klasse 6. Obwohl sie global die seltenste Klasse bildet und sehr große Voids besitzt, kommt das Muster

$6 \rightarrow 6 \rightarrow 6$

deutlich häufiger vor als die entsprechenden Dreierläufe der Klassen 1 und 3.

Die Klasse 6 verbindet somit zwei scheinbar gegensätzliche Eigenschaften:

extrem lange vollständige Abwesenheit

und

lokale Bündelung bei ihrem Auftreten.

Ihre geringe globale Häufigkeit entsteht daher nicht durch eine gleichmäßig dünne Verteilung. Vielmehr wechseln Gebiete vollständiger Abwesenheit mit Bereichen erhöhter lokaler Konzentration.

14.5 Maximale Lauflängen

Die maximal beobachteten Folgen identischer Endwerte lauteten:

Klasse	Maximale Lauflänge
1	3
2	8
3	3
6	5

Für die Klassen 1 und 3 tritt innerhalb der gesamten Milliarde kein Lauf von vier oder mehr identischen Endwerten auf.

Die Klasse 2 erreicht dagegen Folgen von bis zu acht aufeinanderfolgenden Werten. Dies stimmt mit ihrer Rolle als lokal stark auftretende und teilweise selbstbindende Klasse überein.

Die Klasse 6 erreicht trotz ihrer großräumigen Voids lokale Läufe von bis zu fünf Treffern. Auch dieser Befund unterstützt die Interpretation einer räumlich gebündelten Klasse.

14.6 Vierermuster und verbotene Folgen

Für Folgen der Länge vier existieren theoretisch

$$4^4 = 256$$

mögliche Klassenwörter.

Im Gegensatz zu den Dreiermustern treten nicht sämtliche möglichen Viererfolgen auf. Innerhalb der vollständigen Milliardenestreihe besitzen

$$23$$

der 256 theoretisch möglichen Vierermuster die Häufigkeit null.

Damit erscheinen erstmals vollständig verbotene lokale Folgen.

Der Anteil nicht beobachteter Vierermuster beträgt

$$\frac{23}{256} \approx 8,984375 \, \%.$$

Fast neun Prozent aller theoretisch möglichen Viererwörter sind somit im untersuchten Bereich vollständig ausgeschlossen.

Da die Datenbasis eine Milliarde aufeinanderfolgende Ausgangswerte umfasst, kann das Fehlen dieser Muster nicht ohne Weiteres als Folge einer zu kleinen Stichprobe erklärt werden. Die Aussage bleibt zunächst auf den untersuchten Bereich beschränkt, stellt jedoch einen starken empirischen Hinweis auf harte lokale Übergangsbeschränkungen dar.

14.7 Häufigste Vierermuster

Die häufigsten Vierermuster lauten:

Rang	Vierermuster	Häufigkeit
1	2 → 6 → 1 → 2	81.769.958
2	2 → 3 → 1 → 2	73.293.422
3	6 → 1 → 2 → 3	72.765.882

Rang	Vierermuster	Häufigkeit
4	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	54.220.941
5	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$	53.227.702

Die beiden bereits aus den Dreiermustern abgeleiteten Grundschleifen erscheinen damit unmittelbar unter den häufigsten vollständigen Viererfolgen:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Zusätzlich treten deren verschobene Fortsetzungen besonders häufig auf:

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2,$$

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

und

$$6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

Die Vierermuster bestätigen daher, dass es sich bei den beiden Grundschleifen nicht lediglich um eine zufällige Überlagerung häufiger Einzelübergänge handelt. Die vollständigen Schleifen selbst gehören zu den dominierenden lokalen Wörtern.

14.8 Lokale Übergangsgrammatik

Die Gesamtheit aus Übergängen, Dreiermustern, Vierermustern und Lauflängen lässt sich als empirische Übergangsgrammatik der Triatrad-Folge interpretieren.

Diese Grammatik besitzt keine vollständig starre Regel der Form

$$a \rightarrow b$$

mit nur einem zulässigen Nachfolger. Alle vier Klassen können grundsätzlich in unterschiedlichen Zusammenhängen auftreten.

Dennoch sind die Übergänge stark gewichtet. Einige Folgen dominieren, andere werden massiv unterdrückt, und auf der Länge vier erscheinen erstmals vollständig verbotene Wörter.

Die empirische Grundstruktur lautet:

$$1 \rightarrow 2,$$

von dort bevorzugt

$$2 \rightarrow 3$$

oder

$$2 \rightarrow 6,$$

danach bevorzugt

$$3 \rightarrow 1$$

beziehungsweise

$$6 \rightarrow 1.$$

Die Klasse 2 fungiert damit als lokaler Verteiler. Die Klasse 1 wirkt häufig als Rückkehrpunkt. Die Klassen 3 und 6 bilden zwei alternative Zweige, die großräumig miteinander gekoppelt erscheinen, lokal jedoch nur äußerst selten direkt ineinander übergehen.

15. Veränderung der Übergangsgrammatik in den 6-Voids

15.1 Bedingte Übergangsanalyse

Die globale Übergangsanalyse beschreibt sämtliche benachbarten Endwerte des untersuchten Zahlenbereichs gemeinsam. Die großen 6-Voids zeigen jedoch, dass die Endwertfolge unterschiedliche lokale Regime besitzt.

Deshalb wurden die Übergangshäufigkeiten getrennt für folgende Bereiche untersucht:

innerhalb großer 6-Voids,

unmittelbar vor den Voids,

unmittelbar nach den Voids

und

außerhalb der Void- und Randzonen.

Als große Voids wurden für diese Untersuchung 6-freie Intervalle ab einer festgelegten Mindestlänge verwendet. Übergänge, die eine Regionsgrenze überschritten, wurden nicht in eine der beiden angrenzenden Regionen eingerechnet. Dadurch wurden sämtliche regionalen Übergangswahrscheinlichkeiten ausschließlich aus Paaren bestimmt, die vollständig innerhalb derselben Region lagen.

15.2 Ausbildung der Bindung $1 \leftrightarrow 3$

Die stärkste Veränderung innerhalb der großen 6-Voids betrifft den Übergang

$$1 \rightarrow 3.$$

Außerhalb der Voids beträgt seine bedingte Wahrscheinlichkeit ungefähr

$$P(1 \rightarrow 3 \mid \text{außen}) = 9,34 \, \%.$$

Innerhalb der Voids steigt sie auf

$$P(1 \rightarrow 3 \mid \text{Void}) = 39,71 \, \%.$$

Die Zunahme beträgt damit

$$30,37$$

Prozentpunkte.

Relativ zum Außenwert entspricht dies ungefähr dem Faktor

$$\frac{39,71}{9,34} \approx 4,25.$$

Noch deutlicher ist der umgekehrte Übergang

$$3 \rightarrow 1.$$

Außerhalb der Voids beträgt seine bedingte Wahrscheinlichkeit ungefähr

69,48 %.

Innerhalb der Voids steigt sie auf

98,39 %.

Damit folgt innerhalb eines großen 6-Voids auf nahezu jeden Wert der Klasse 3 unmittelbar ein Wert der Klasse 1.

Die beiden Veränderungen erzeugen eine ausgeprägte lokale Bindung

$$1 \leftrightarrow 3,$$

insbesondere in Form der Folge

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Diese Bindung ist ein kennzeichnendes Merkmal des Void-Regimes.

15.3 Umlenkung der Klasse 2

Innerhalb der Voids ist der Übergang

$$2 \rightarrow 6$$

unmöglich.

Die Klasse 2 wird jedoch nicht ausschließlich zu einer einzigen Ersatzklasse umgelenkt. Stattdessen steigt insbesondere die Wahrscheinlichkeit von

$$2 \rightarrow 3$$

von ungefähr

39,35 %

außerhalb auf

48,52 %

innerhalb der Voids.

Auch

$$2 \rightarrow 1$$

nimmt zu. Seine Wahrscheinlichkeit steigt von ungefähr

10,32 %

auf

19,41 %.

Der fehlende Ast

$$2 \rightarrow 6$$

wird somit überwiegend durch eine verstärkte Zuweisung an die Klassen 3 und 1 ersetzt.

Die lokale Struktur kippt von der global dominierenden Verzweigung

$$2 \rightarrow \begin{cases} 3, \\ 6 \end{cases}$$

zu einer Void-Struktur, in der

$$2 \rightarrow 3$$

deutlich bevorzugt wird und die Klasse 3 anschließend fast zwingend zur Klasse 1 führt.

Schematisch entsteht:

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

15.4 Ersatz des 6-Zweiges

Außerhalb der Voids bildet die Folge

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

einen der beiden dominanten lokalen Zweige.

Innerhalb eines 6-Voids entfällt dieser Zweig vollständig. Sein Ausfall führt jedoch nicht lediglich zu einer proportionalen Verstärkung des anderen globalen Zweiges

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Zusätzlich bildet sich die starke Wechselbindung

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Das Void-Regime kann daher näherungsweise durch zwei Bewegungsformen beschrieben werden:

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Die Klasse 3 übernimmt damit innerhalb der Voids einen Teil der Funktion, die außerhalb auf die getrennten Klassen 3 und 6 verteilt ist.

15.5 Vorboten des Regimewechsels

Die Veränderung der Übergangsgrammatik beginnt bereits vor dem eigentlichen Void. Besonders der Übergang

$$2 \rightarrow 6$$

bricht in der Vorzone fast vollständig zusammen, obwohl einzelne Werte der Klasse 6 dort noch vorhanden sind.

Die bloße Klassenhäufigkeit zeigt diesen Vorgang bereits durch den Rückgang von P_6 auf etwa

$$1,38 \, \%$$

Die Übergangsanalyse zeigt jedoch zusätzlich, dass nicht nur die Anzahl der 6-Treffer abnimmt. Bereits ihre lokale Einbindung in die dominierende Folge

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

wird aufgelöst.

Die Vorzone ist daher nicht nur eine verdünnte Form des Außenbereichs. Sie besitzt bereits wesentliche grammatische Eigenschaften des folgenden Voids.

15.6 Rückkehr nach dem Void

Nach dem Void erscheint die Klasse 6 erneut. Ihre Rückkehr stellt jedoch nicht sofort das Außenregime wieder her.

Der Übergang

$$2 \rightarrow 6$$

erreicht in der Nachzone zunächst nur ungefähr

$$8,26 \, \%$$

Außerhalb der Voidbereiche beträgt er dagegen etwa

26,81 %.

Der für den globalen 6-Zweig wesentliche Zulauf aus der Klasse 2 bleibt somit nach dem Void noch deutlich geschwächt.

Gleichzeitig tritt der Übergang

$6 \rightarrow 2$

in der Nachzone mit ungefähr

16,87 %

auf, während sein Außenwert nur etwa

7,41 %

beträgt.

Die zurückkehrende Klasse 6 besitzt somit zunächst eine andere lokale Einbindung. Sie wird noch relativ selten aus der Klasse 2 erreicht, führt danach aber überdurchschnittlich häufig selbst zur Klasse 2.

Vor dem Void bricht der Weg

$2 \rightarrow 6$

zusammen. Nach dem Void ist vorübergehend der umgekehrte Weg

$6 \rightarrow 2$

verstärkt.

Diese gerichtete Asymmetrie zeigt erneut, dass der Austritt aus dem Void kein Spiegelbild seines Eintritts ist.

15.7 Regimebild der Übergänge

Die regionale Übergangsanalyse kann in vereinfachter Form zusammengefasst werden.

Außerhalb der Voids dominiert:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow \begin{cases} 3, \\ 6 \end{cases} \rightarrow 1.$

Innerhalb der Voids dominiert dagegen:

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1,$

ergänzt durch

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Vor dem Void wird die zweite Struktur bereits vorbereitet. Nach dem Void löst sie sich nur schrittweise wieder auf.

Damit betrifft der Void nicht nur die Anwesenheit oder Abwesenheit eines einzelnen Symbols. Er verändert die lokale Grammatik der gesamten Vierklassenfolge.

16. Referenzmodell einer unabhängigen Klassenfolge

16.1 Zweck des Vergleichs

Die Triatrad-Folge ist vollständig deterministisch. Sie ist keine Zufallsfolge und wird in dieser Arbeit nicht als stochastischer Prozess interpretiert.

Ein unabhängiges Zufallsmodell kann dennoch als Referenz dienen. Es beantwortet die Frage, welche Größenordnungen von Übergängen und Voids zu erwarten wären, wenn dieselben globalen Klassenhäufigkeiten ohne räumliche Bindungen zufällig entlang der Zahlenachse angeordnet wären.

Das Referenzmodell verwendet die gemessenen Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = 0,293421555,$$

$$p_2 = 0,393924939,$$

$$p_3 = 0,194130342,$$

$$p_6 = 0,118523164.$$

Unter der Annahme unabhängiger Positionen wäre die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs $a \rightarrow b$

$$P(a \rightarrow b) = p_a p_b.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Folgewertes b wäre unabhängig vom Ausgangswert a :

$$P(E(N + 1) = b \mid E(N) = a) = p_b.$$

16.2 Abweichung der Übergänge

Die empirische Endwertfolge erfüllt diese Unabhängigkeitsbedingung nicht.

Die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten unterscheiden sich teilweise massiv von den globalen Anteilen. Besonders deutlich wird dies innerhalb der Void-Regime, wo beispielsweise

$$P(3 \rightarrow 1 \mid \text{Void}) \approx 98,39 \%$$

gilt, während der regionale Anteil der Klasse 1 nur ungefähr

$$37,24 \%$$

beträgt.

Auch die starke Konzentration auf wenige Dreier- und Vierermuster ist mit einer unabhängigen Anordnung nicht vereinbar. In einem unabhängigen Modell wären die Wortwahrscheinlichkeiten durch Produkte der Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmt. Die empirische Folge zeigt dagegen Häufigkeitsunterschiede von mehreren Millionen zu eins sowie vollständig fehlende Vierermuster.

16.3 Erwartete Void-Größe im unabhängigen Modell

Für eine Klasse mit Wahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein festes Intervall der Länge L keinen Treffer dieser Klasse enthält,

$$(1 - p)^L.$$

Für die Klasse 6 gilt

$$p_6 = 0,118523164.$$

Damit ist

$$1 - p_6 = 0,881476836.$$

Für einen 6-freien Abschnitt der Länge L ergibt sich im unabhängigen Referenzmodell

$$P_L = (0,881476836)^L.$$

Dieser Ausdruck fällt exponentiell mit L .

Bereits bei

$$L = 1.000$$

ist die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten vollständig 6-freien Intervalls extrem klein.

Die beobachteten Voids besitzen jedoch Längen von mehreren Millionen bis

$$34.147.153.$$

Der größte beobachtete 6-Void ist daher mit einem unabhängigen Zufallsmodell der gemessenen globalen Dichte praktisch unvereinbar.

Diese Aussage bedeutet nicht, dass ein zufälliges Ereignis logisch unmöglich wäre.

Sie bedeutet, dass das unabhängige Modell keine plausible Beschreibung der beobachteten räumlichen Anordnung liefert.

16.4 Häufigkeit als unzureichende Erklärung

Der geringere Anteil der Klasse 6 erklärt, warum ihre durchschnittlichen Abstände größer sein können als jene der häufigeren Klassen.

Er erklärt jedoch nicht:

Voids von mehreren Millionen Werten,
eine annähernde Verdopplungsleiter der größten Voids,
veränderte Klassenanteile vor und nach den Voids
und
eine eigene Übergangsgrammatik innerhalb der Voids.

Diese Eigenschaften betreffen die räumliche Ordnung der Folge und nicht nur die Zahl ihrer Klassentreffer.

Die Void-Länge muss daher als eigenständige Strukturgröße behandelt werden.

17. Empirische Folgerungen für das Klassifikationsproblem

17.1 Mehr als eine globale Häufigkeitsverteilung

Die Milliardentestreihe zeigt zunächst eine stabile globale Rangfolge:

$$2 > 1 > 3 > 6.$$

Allein daraus könnte noch keine besondere innere Arithmetik abgeleitet werden.

Ungleiche Häufigkeiten können bei vielen deterministischen Abbildungen auftreten.

Die weiterführenden Analysen zeigen jedoch mehrere zusätzliche Ebenen:

gerichtete Übergänge,

stark konzentrierte Klassenwörter,

nicht beobachtete Vierermuster,

klassenspezifische Lauflängen,

skalierende 6-Voids

und

regional wechselnde Übergangsgrammatiken.

Diese Eigenschaften bilden gemeinsam ein wesentlich stärkeres empirisches Strukturargument als die globale Verteilung allein.

17.2 Anforderungen an eine direkte Endwertregel

Eine mögliche direkte Funktion

$$\Phi(N) = E(N)$$

müsste nicht nur die vier globalen Klassenanteile reproduzieren.

Sie müsste zugleich erklären, warum die Endwerte benachbarter Zahlen stark gerichtet aufeinander folgen, warum bestimmte kurze Muster millionenfach häufiger sind als andere und warum einzelne Vierermuster innerhalb einer Milliarde Werte vollständig fehlen.

Sie müsste außerdem die Sonderrolle der Klasse 6 erfassen. Dazu gehören:

ihre geringe globale Häufigkeit,

ihre lokale Bündelung,

ihre extremen Ausschlussintervalle,
die annähernde Verdopplung ihrer größten Voids

und

die Umstellung der gesamten lokalen Klassenordnung während dieser Voids.

Eine ausschließlich auf einer festen kleinen Restklasse beruhende Regel erscheint angesichts dieser mehrskaligen Struktur wenig wahrscheinlich. Eine direkte Klassifikation müsste zugleich lokale und großräumige Eigenschaften der natürlichen Zahlen abbilden.

17.3 Hinweis auf eine verborgene Klassenarithmetik

Die empirischen Befunde beweisen noch keine geschlossene Triatrad-Arithmetik. Sie liefern jedoch deutliche Hinweise darauf, dass die vier Endklassen nicht unabhängig und nicht räumlich unstrukturiert auftreten.

Besonders die Kombination aus bevorzugten Übergangsschleifen und großräumigen Void-Regimen legt nahe, dass dieselbe Klassenzuordnung auf unterschiedlichen Skalen wirksam ist.

Lokal erscheint sie als gerichtete Grammatik:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \begin{cases} 3, \\ 6 \end{cases} \rightarrow 1.$$

Großräumig erscheint sie als Wechsel zwischen normalen Bereichen, Übergangszonen und ausgedehnten 6-Ausschlussregimen.

Innerhalb der Ausschlussregime wird die globale Grammatik durch

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

ersetzt.

Eine künftige direkte Klassenarithmetik müsste diese beiden Beschreibungsebenen in einer gemeinsamen Regel zusammenführen.

17.4 Grenzen der empirischen Aussage

Die Haupttestreihe umfasst genau eine Milliarde aufeinanderfolgende Ausgangswerte im Bereich

$$10 \leq N \leq 1.000.000.009.$$

Alle statistischen Aussagen gelten zunächst für diesen Bereich.

Insbesondere folgt aus der beobachteten Verdopplungsleiter noch nicht, dass dieselbe Struktur für beliebig große N unverändert fortbesteht. Ebenso ist nicht bewiesen, dass die 23 innerhalb der Milliarde fehlenden Vierermuster global unmöglich sind.

Die Daten zeigen jedoch, dass diese Strukturen über einen sehr großen zusammenhängenden Bereich stabil genug sind, um als eigenständige Forschungsgegenstände behandelt zu werden.

Weitere Zahlenbereiche können die beobachteten Regeln bestätigen, verfeinern oder durch neue Regime ergänzen. Die vorliegende Milliardentestreihe bildet daher keine abschließende statistische Theorie, sondern eine erste umfassende empirische Kartierung der Triatrad-Folge.

17.5 Bereitstellung der Auswertungsdaten

Die aus der validierten Datenbasis erzeugten Analysetabellen werden als ergänzender komprimierter Datensatz zur Zenodo-Veröffentlichung bereitgestellt.

Der Zusatzdatensatz enthält die maschinenlesbaren CSV-Auswertungen zu den globalen und lokalen Klassenverteilungen, den Übergängen, den Lauflängen, den Klassenwörtern, den Voids sowie den Vor-, Innen- und Nachzonen der großen 6-Voids.

Die zugrunde liegende SQLite-Datenbank wird nicht veröffentlicht. Die zur Erzeugung, Validierung und Analyse verwendeten Programme werden vollständig im Anhang „Verwendete Skripte im Paper“ dokumentiert. Dadurch bleiben Berechnungslogik, Codierung, Decodierung und statistische Auswertung nachvollziehbar, während die veröffentlichten Zusatzdaten auf die für die Ergebnisse relevanten Tabellen beschränkt werden.

18. Abschluss der empirischen Untersuchung

Die empirische Untersuchung von einer Milliarde aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zeigt, dass das kanonische Triatrad nicht nur eine vollständige terminale Vierermenge des rekursiven Dreieckszahlenabstiegs bildet. Die vier Endwerte erzeugen entlang der natürlichen Zahlen eine ausgeprägte, mehrskalige Ordnung.

Global sind die vier Klassen dauerhaft ungleich gewichtet. Lokal bilden sie gerichtete Übergänge, bevorzugte Schleifen, klassenspezifische Wiederholungsgrenzen und teilweise vollständig ausgeschlossene Klassenwörter. Großräumig besitzt insbesondere die Klasse 6 Ausschlussintervalle von bis zu

$$34.147.153$$

aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Die größten dieser Voids folgen in Lage und Länge einer auffälligen annähernden Verdopplungsstruktur.

Innerhalb der 6-Voids verschwindet nicht nur ein Endwert. Die gesamte lokale Klassenverteilung wechselt in ein anderes Regime. Die Klasse 3 übernimmt einen erheblichen Teil der fehlenden Struktur, die Klasse 1 wird verstärkt, die Klasse 2 verliert an Gewicht, und die außerhalb dominierende Übergangsschleife über die Klasse 6 wird durch eine starke Bindung zwischen den Klassen 1 und 3 ersetzt. Dieser Wechsel beginnt bereits vor der eigentlichen Nullzone und klingt nach ihrem Ende nur verzögert ab.

Die Endklassen treten damit weder unabhängig noch lokal zufällig verteilt auf. Ihre Häufigkeiten, Reihenfolgen und Ausschlussbereiche sind miteinander gekoppelt. Die empirischen Ergebnisse beweisen noch keine direkte Triatrad-Arithmetik, schränken ihre mögliche Form jedoch bereits erheblich ein.

Die zentrale offene Frage erhält durch die Milliardentestreihe daher zusätzliches Gewicht:

Welche intrinsische arithmetische Eigenschaft von N bestimmt unmittelbar seinen

$$\text{Endwert } E(N) \in \{1,2,3,6\}?$$

Der theoretische Triatrad-Satz beweist, dass jedes positive natürliche N genau einem der vier Bäume angehört. Die empirische Untersuchung zeigt darüber hinaus, dass diese vier Bäume entlang der natürlichen Zahlen nicht beliebig ineinandergreifen,

sondern eine bislang nicht erklärte Klassenordnung mit lokalen Übergangsregeln und großräumigen Verteilungsregimen bilden.

19. Entdeckung des Triatrad in KQ

19.1 Historischer Ausgangspunkt

Das kanonische Triatrad wurde nicht zunächst aus der allgemeinen Untersuchung des Operators

$$F(N) = N - T_{t(N)}$$

hergeleitet. Seine Entdeckung ging aus früheren Untersuchungen innerhalb von KQ hervor.

Im Verlauf dieser Untersuchungen wurden wiederholt Abstiegswege betrachtet, die von großen Ausgangswerten zu kleinen terminalen Restwerten führten. Zunächst traten dabei insbesondere die Werte

$$1, \quad 2, \quad 3$$

als Endwerte auf.

Zu diesem Zeitpunkt lag noch kein allgemeiner Beweis dafür vor, welche positiven Endwerte überhaupt möglich sind. Die beobachteten Werte konnten daher zunächst nur als empirische Terminalwerte verstanden werden.

Die KQ-Struktur deutete jedoch darauf hin, dass die bis dahin sichtbare Menge

$$\{1,2,3\}$$

noch nicht vollständig war. Innerhalb der rekursiven KQ-Betrachtung ergab sich die Erwartung eines vierten terminalen Wertes.

Dieser vierte Wert wurde strukturell als

$$6$$

bestimmt.

Damit entstand die Vorhersage der vollständigen Vierermenge

$$\{1,2,3,6\}$$

noch bevor der formulierte allgemeine Triatrad-Satz bekannt war.

19.2 Von drei beobachteten Endwerten zur Vierermenge

Die Werte 1, 2 und 3 erschienen früh als tatsächliche Endpunkte berechneter Abstiegswege. Ihr Auftreten allein ließ jedoch noch mehrere Möglichkeiten offen.

Es hätte sich um die ersten drei Elemente einer größeren terminalen Menge handeln können. Ebenso war zunächst nicht ausgeschlossen, dass weitere, wesentlich größere Endwerte auftreten.

Die KQ-Untersuchung führte dagegen zu einer begrenzten Viererstruktur. Neben den bereits beobachteten Werten

$$1, \quad 2, \quad 3$$

musste demnach ein vierter terminaler Wert existieren.

Die rekursive Struktur führte auf

$$6.$$

Damit wurde nicht bloß ein weiterer möglicher Kandidat vermutet. Die KQ-Struktur lieferte eine konkrete Vorhersage:

$$\mathcal{T}_{KQ} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Diese Vorhersage besaß zunächst den Charakter einer strukturellen Schlussfolgerung innerhalb von KQ. Zu ihrer unmittelbaren Bestätigung fehlte noch ein konkreter größerer Ausgangswert, dessen vollständiger Abstieg tatsächlich bei 6 endete.

19.3 Die Suche nach dem vierten Endwert

Nach der strukturellen Bestimmung der 6 begann die Suche nach einem nichtterminalen Wert

$$N > 6$$

mit

$$E(N) = 6.$$

Diese Suche war deshalb nicht trivial, weil viele kleine und mittlere Ausgangswerte zu den bereits bekannten Endwerten 1, 2 oder 3 führten.

Gesucht wurde somit nicht erst im Nachhinein nach einer Erklärung für einen zufällig gefundenen Endwert. Vielmehr existierte zuerst die strukturelle Vorhersage der 6, und

danach wurde gezielt nach einem vollständigen Abstiegsweg gesucht, der diese Vorhersage bestätigte.

Der erste geeignete Weg wurde für

$$N = 82$$

gefunden.

Es gilt

$$t(82) = 9$$

und

$$T_9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45.$$

Daraus folgt

$$82 \rightarrow 37.$$

Für den nächsten Wert gilt

$$t(37) = 6$$

und

$$T_6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

Somit erhält man

$$37 \rightarrow 16.$$

Anschließend gilt

$$t(16) = 4$$

und

$$T_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Daher folgt

$$16 \rightarrow 6.$$

Für 6 ist

$$t(6) = 3$$

und

$$T_3 = 6.$$

Somit wäre der nächste formale Wert

$$F(6) = 0.$$

Der vollständige positive Abstiegsweg lautet daher

$$82 \rightarrow 37 \rightarrow 16 \rightarrow 6.$$

Damit wurde die strukturell erwartete vierte Endklasse erstmals durch einen konkreten nichtterminalen Ausgangswert bestätigt:

$$E(82) = 6.$$

19.4 Rückwärtsdarstellung des gefundenen Weges

Der gefundene Weg kann auch als Teil des Rückwärtsbaumes der Klasse $\mathcal{C}_6$ gelesen werden:

$$6 \leftarrow 16 \leftarrow 37 \leftarrow 82.$$

Jeder Pfeil bedeutet dabei, dass der rechts stehende Wert beim nächsten Abstieg auf den links stehenden Wert fällt.

Für den ersten Schritt gilt

$$16 = 6 + T_4.$$

Für den zweiten Schritt gilt

$$37 = 16 + T_6.$$

Für den dritten Schritt gilt

$$82 = 37 + T_9.$$

Der Weg ist damit zugleich eine konkrete endliche Vorgängerkette der Wurzel 6.

Diese Darstellung verbindet die frühe KQ-Entdeckung unmittelbar mit der später in Kapitel 7 entwickelten Vierbaumzerlegung. Der Wert 82 liegt im Rückwärtsbaum der Wurzel 6 und gehört daher zur Klasse

$$\mathcal{C}_6.$$

19.5 Verhältnis zwischen KQ-Vorhersage und Triatrad-Satz

Die KQ-Vorhersage und der Triatrad-Satz erfüllen unterschiedliche wissenschaftliche Funktionen.

Die KQ-Untersuchung führte zur Entdeckung und strukturellen Erwartung der Vierermenge

$$\{1,2,3,6\}.$$

Der spätere Triatrad-Satz beweist dagegen unabhängig von dieser Entdeckungsgeschichte, dass keine weiteren positiven terminalen Endwerte existieren können.

Die beiden Zugänge können daher wie folgt unterschieden werden:

KQ $\rightarrow$ strukturelle Vorhersage,

Triatrad-Satz $\rightarrow$ allgemeiner Vollständigkeitsbeweis.

KQ sagte den vierten Endwert voraus, bevor ein vollständiger allgemeiner Beweis für die Endwertmenge vorlag. Der Triatrad-Satz erklärt anschließend klassisch, weshalb gerade

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6$$

und kein fünfter positiver Wert terminal sein kann.

Die KQ-Herleitung selbst ist nicht Gegenstand dieses Papers. Für die vorliegende Arbeit ist lediglich entscheidend, dass KQ als Entdeckungsraum diene und die vollständige Vierermenge bereits vor ihrer allgemeinen arithmetischen Begründung sichtbar machte.

19.6 KQ und KFS als geometrischer Entdeckungsraum

Innerhalb von KQ und KFS wird ein Wert N nicht ausschließlich als isolierter Punkt der natürlichen Zahlen betrachtet. Er besitzt eine gruppenspezifische Lage, einen adaptiven Motor und zugehörige Schalenpartner.

Für den hier verwendeten Abstiegsoperator ist der Motor

$$K(N) = T_{t(N)}.$$

Die KFS-Darstellung besitzt damit die Form

$$N - T_{t(N)} \leftrightarrow N \leftrightarrow N + T_{t(N)}.$$

Der Triatrad-Abstieg folgt jeweils dem linken Schalenpartner:

$$N \rightarrow N - T_{t(N)}.$$

Nach jedem Schritt wird der Motor aus dem neuen Wert erneut bestimmt. Der Abstieg ist daher adaptiv. Es wird nicht wiederholt dieselbe Dreieckszahl subtrahiert.

Diese geometrische Darstellung machte die rekursive Struktur der Endwerte sichtbar, bevor ihre vollständige klassische Charakterisierung vorlag.

Für den allgemeinen Beweis des Triatrad-Satzes ist diese KQ- und KFS-Sprache nicht erforderlich. Sie erklärt jedoch den Forschungsweg, auf dem die Vierermenge zuerst erkannt wurde.

19.7 Keine zweite Beweisführung

Das vorliegende Kapitel soll keine alternative vollständige Herleitung des Triatrad aus KQ liefern.

Eine solche Herleitung würde umfangreiche zusätzliche Definitionen voraussetzen und den Schwerpunkt dieser Arbeit verschieben. Der mathematische Hauptsatz wurde bereits unabhängig bewiesen.

Das Ziel dieses Kapitels ist daher begrenzt:

Erstens wird dokumentiert, dass die Endwerte 1, 2 und 3 zunächst empirisch in KQ-Abstiegen sichtbar wurden.

Zweitens wird festgehalten, dass KQ einen vierten Endwert erwarten ließ.

Drittens wird die rekursive Bestimmung dieses Endwertes als 6 beschrieben.

Viertens wird mit

$$82 \rightarrow 37 \rightarrow 16 \rightarrow 6$$

der erste konkrete bestätigende Abstiegsweg angegeben.

Damit bleibt die wissenschaftliche Rollenverteilung eindeutig:

KQ und KFS = Entdeckungszusammenhang,

Triatrad-Satz = allgemeiner Begründungszusammenhang.

19.8 Beobachtete Abstiegsdauer großer Werte

Die frühen KQ-Untersuchungen umfassten nicht nur kleine Beispiele. Es wurden auch sehr große Ausgangswerte mit Bitlängen von ungefähr 2048 und 4096 untersucht.

Dabei zeigte sich ein auffälliger Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Bitlänge des Ausgangswertes und der Zahl der vollständigen Abstiegsstufen.

Für geprüfte Werte mit

$$\text{bitlen}(N) = 2048$$

wurden ungefähr

2046

vollständige Abstiege beobachtet.

Für geprüfte Werte mit

$$\text{bitlen}(N) = 4096$$

lagen die beobachteten Abstiegszahlen ungefähr im Bereich

4093 bis 4096.

Diese Beobachtungen führen auf die Größenbeziehung

$$L(N) \approx \text{bitlen}(N),$$

wobei $L(N)$ die Zahl der vollständigen Abstiegsübergänge bis zum terminalen Endwert bezeichnet.

Die Aussage ist bislang als empirische Hypothese zu verstehen. Die verfügbaren großen Testwerte zeigen eine deutliche Nähe zwischen Bitlänge und Abstiegsdauer, reichen jedoch nicht für einen allgemeinen Satz über sämtliche positiven natürlichen Zahlen aus.

19.9 Theoretische Erklärung der Größenordnung

Die beobachtete Nähe zwischen Bitlänge und Abstiegsdauer lässt sich aus der Form des Operators plausibel erklären.

Für große N gilt

$$t(N) \approx \sqrt{N}.$$

Die zugehörige Dreieckszahl besitzt daher näherungsweise die Größe

$$T_{t(N)} = \frac{t(N)(t(N) + 1)}{2} \approx \frac{N}{2}.$$

Daraus folgt

$$F(N) = N - T_{t(N)} \approx \frac{N}{2}.$$

Eine Halbierung einer positiven Ganzzahl reduziert ihre Binärlänge im Regelfall um ungefähr eine Stelle. Somit gilt näherungsweise

$$\text{bitlen}(F(N)) \approx \text{bitlen}(N) - 1.$$

Wird dieser Vorgang rekursiv fortgesetzt, so ist zu erwarten, dass ein b -Bit-Wert ungefähr b Abstiegsstufen benötigt, um den kleinen terminalen Bereich zu erreichen. Daraus ergibt sich die Hypothese

$$L(N) \sim \log_2 N$$

beziehungsweise

$$L(N) \approx \text{bitlen}(N).$$

19.10 Exakte Abweichung von der Halbierung

Die Halbierung ist nur der führende Größenanteil. Der Operator besitzt innerhalb eines Intervalls eine exakte Korrekturform.

Sei

$$m = t(N)$$

und

$$N = m(m - 1) + r$$

mit

$$0 \leq r \leq 2m - 1.$$

Dann gilt

$$F(N) = \frac{m(m - 3)}{2} + r.$$

Da

$$\frac{N}{2} = \frac{m(m - 1) + r}{2},$$

folgt

$$F(N) - \frac{N}{2} = \frac{r}{2} - m.$$

Somit erhält man die exakte Darstellung

$$F(N) = \frac{N}{2} + \frac{r}{2} - m.$$

Der Term

$$\delta(N) = \frac{r}{2} - m$$

beschreibt die Abweichung eines einzelnen Schrittes von der idealen Halbierung.

Wegen

$$0 \leq r \leq 2m - 1$$

gilt

$$-m \leq \delta(N) \leq -\frac{1}{2}.$$

Damit folgt für jeden positiven natürlichen Wert

$$F(N) < \frac{N}{2}.$$

Jeder Schritt fällt somit stets stärker als eine exakte Halbierung aus. Wie stark die zusätzliche Verminderung ist, hängt von der Intervallposition r ab. Die gesamte Weglänge wird durch die Folge dieser Korrekturterme beeinflusst..

19.11 Hypothese des näherungsweisen Bitverlustes

Die empirischen Großzahlentests und die asymptotische Halbierungsform führen zu folgender Hypothese.

Hypothese 1. Für große positive natürliche Ausgangswerte vermindert eine vollständige Abstiegsstufe die Binärlänge des aktuellen Wertes im Mittel um ungefähr ein Bit. Daher liegt die Zahl der Abstiegsstufen bis zum Triatrad-Endwert in der Größenordnung der Bitlänge des Ausgangswertes:

$$L(N) \approx \text{bitlen}(N).$$

Die Formulierung bezieht sich auf einen näherungsweisen Informationsverlust. Sie behauptet nicht, dass in jedem einzelnen Schritt exakt ein Bit verschwindet.

Die genaue Veränderung hängt von

$$\delta_k = \frac{r_k}{2} - m_k$$

ab, wobei für den k -ten Abstiegswert

$$N_k = m_k(m_k - 1) + r_k$$

gilt.

Der vollständige Weg kann somit geschrieben werden als

$$N_{k+1} = \frac{N_k}{2} + \delta_k.$$

Wegen

$$0 \leq r_k \leq 2m_k - 1$$

gilt stets

$$\delta_k \leq -\frac{1}{2}.$$

Damit folgt für jeden Abstiegsübergang

$$N_{k+1} < \frac{N_k}{2}.$$

Die Halbierung bestimmt die grobe Hüllkurve. Die Folge

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{L(N)-1}$$

bestimmt die feineren Abweichungen und möglicherweise auch die terminale Klassenzuordnung.

19.12 Informationsreduktion

Die näherungsweise Halbierung erlaubt eine informationstheoretische Interpretation des Abstiegs.

Ein Ausgangswert mit b Binärstellen besitzt eine Größeninformation der Ordnung

$$b \approx \log_2 N.$$

Für jeden tatsächlich ausgeführten Abstiegsübergang gilt

$$N_{k+1} < \frac{N_k}{2}.$$

Daraus folgt

$$\text{bitlen}(N_{(k+1)}) \leq \text{bitlen}(N_k) - 1$$

Jeder Abstiegsübergang vermindert die für die Darstellung des aktuellen Wertes benötigte Binärlänge somit um mindestens eine Stelle. In einzelnen Schritten können auch mehrere Binärstellen verloren gehen.

Der Abstieg kann daher als deterministische Informationsreduktion beschrieben werden:

$$N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots \rightarrow E(N_0).$$

Am Ende verbleibt einer der vier terminalen Werte

$$E(N_0) \in 1, 2, 3, 6.$$

Der Ausgangswert verliert damit schrittweise nahezu seine gesamte Größeninformation. Er behält jedoch eine terminale Klasseninformation, die ihn eindeutig einem der vier Triatrad-Bäume zuordnet.

Diese Endinformation ist nicht allein durch die Bitlänge bestimmt. Zwei sehr große Werte können dieselbe oder nahezu dieselbe Bitlänge besitzen und dennoch in verschiedenen Triatrad-Klassen enden.

Die grobe Größeninformation wird daher durch die fortgesetzte Größenreduktion abgebaut, während die terminale Klasseninformation durch die vollständige Folge der diskreten Korrekturen bestimmt wird

19.13 Offene Fragen zur Abstiegsdauer

Die bisherige Hypothese bedarf einer wesentlich breiteren und systematischeren Untersuchung.

Da jeder Abstiegsübergang die Binärlänge um mindestens eine Stelle vermindert, gilt für die Zahl $L(N)$ der tatsächlichen Abstiegsübergänge die obere Schranke

$$L(N) \leq \text{bitlen}(N) - \text{bitlen}(E(N)).$$

Eine erste präzise Forschungsfrage betrifft daher den Abstand zur maximal möglichen Weglänge. Hierzu kann die nichtnegative Größe

$$D(N) = \text{bitlen}(N) - \text{bitlen}(E(N)) - L(N)$$

definiert werden.

Offen ist, welche Schranken für $D(N)$ gelten und ob eine globale Konstante C existiert, sodass

$$0 \leq D(N) \leq C$$

für alle hinreichend großen N gilt.

Eine schwächere asymptotische Frage lautet, ob

$$L(N) = \text{bitlen}(N) + o(\text{bitlen}(N))$$

gilt. Da der terminale Endwert nur eine beschränkte Bitlänge besitzt, ist ebenso zu untersuchen, ob

$$\frac{L(N)}{\text{bitlen}(N)} \rightarrow 1$$

für $N \rightarrow \infty$ in einem geeigneten Sinn gilt.

Weitere offene Fragen betreffen die terminalen Klassen:

Weitere offene Fragen betreffen die terminalen Klassen. Zu untersuchen ist, ob die Klassen C_1 , C_2 , C_3 und C_6 unterschiedliche Weglängenprofile besitzen. Ebenso ist offen, ob der Abstand $D(N)$ systematisch vom Endwert $E(N)$ abhängt und welche Rolle die Korrekturfolge $\delta_k = \frac{r_k}{2} - m_k$ für die Weglänge und die terminale Klassenzuordnung spielt. Darüber hinaus ist zu prüfen, ob relativ zur Bitlänge außergewöhnlich kurze Abstiegswege existieren und wie häufig Abstiegswege nahe an ihrer theoretisch maximalen Länge liegen.

Diese Fragen werden in der vorliegenden Arbeit nicht abschließend untersucht. Sie bilden einen eigenständigen Forschungsbereich für zukünftige Arbeiten

19.14 Bedeutung der Hypothese für die Triatrad-Forschung

Die Hypothese des näherungsweisen Bitverlustes erklärt die Länge des Weges, nicht dessen Endwert.

Für große N besitzen alle vier terminalen Klassen dieselbe grobe exponentielle Hüllkurve:

$$N_k \approx \frac{N_0}{2^k}.$$

Aus dieser Hüllkurve allein lässt sich nicht erkennen, ob der Weg bei

1, 2, 3

oder

6

endet.

Die Klasseninformation liegt vielmehr in den diskreten Abweichungen

$$\delta_k.$$

Damit ergeben sich zwei getrennte Ebenen:

Halbierungsanteil $\rightarrow$ Weglänge,

Korrekturfolge $\rightarrow$ mögliche Klasseninformation.

Diese Trennung verdeutlicht, weshalb die Abstiegsdauer vergleichsweise einfach durch die Bitlänge beschrieben werden kann, während die direkte Bestimmung des Endwertes weiterhin offen bleibt.

Die Hypothese stärkt somit das zentrale Klassifikationsproblem. Sie zeigt, dass der Operator die Größeninformation eines beliebig großen N in ungefähr bitlängenproportional vielen Schritten reduziert, dabei aber eine nichttriviale vierwertige Endinformation bewahrt.

20. Weiterführende Strukturfragen

20.1 Direkte Bestimmung des Endwertes

Das zentrale offene Problem bleibt die direkte Bestimmung von

$$E(N)$$

ohne Ausführung des vollständigen Abstiegs.

Gesucht ist eine arithmetische Abbildung

$$\Phi: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \{1,2,3,6\}$$

mit

$$\Phi(N) = E(N)$$

für alle positiven natürlichen Zahlen.

Eine solche Abbildung müsste sowohl die lokale Übergangsgrammatik als auch die großräumigen Void-Regime erklären.

20.2 Struktur der Korrekturfolge

Die exakte Rekursion

$$N_{k+1} = \frac{N_k}{2} + \delta_k$$

mit

$$\delta_k = \frac{r_k}{2} - m_k$$

legt nahe, die Folge

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{L(N)-1}$$

als eigenes Objekt zu untersuchen.

Wegen

$$0 \leq r_k \leq 2m_k - 1$$

gilt für jeden Abstiegsübergang

$$-m_k \leq \delta_k \leq -\frac{1}{2}.$$

Die Korrekturterme sind somit stets negativ. Eine Unterscheidung zwischen positiven und negativen Abweichungen ist daher nicht erforderlich.

Mögliche Kennzahlen sind stattdessen die kumulierte Korrektur

$$K(N) = \sum_{k=0}^{L(N)-1} \delta_k,$$

die mittlere Korrektur

$$\bar{\delta}(N) = \frac{1}{L(N)} \sum_{k=0}^{L(N)-1} \delta_k$$

sowie die Zahl besonders starker Abweichungen von der Halbierung. Für eine vorgegebene Schranke $\lambda > 0$ kann hierzu beispielsweise

$$S_\lambda(N) = \#\{k: \delta_k \leq -\lambda\}$$

definiert werden.

Zu prüfen ist, ob verschiedene Triatrad-Klassen charakteristische Korrekturprofile besitzen

20.3 Symbolische Wegcodierung

Jeder Abstiegsweg erzeugt eine Folge von Intervallindizes

$$m_0, m_1, \dots, m_{L(N)-1}$$

und eine Folge von Positionen

$$r_0, r_1, \dots, r_{L(N)-1}.$$

Diese Daten können als symbolische Codierung des Weges verstanden werden.

Es ist offen, ob eine verkürzte Signatur dieser Folgen den Endwert bestimmt. Eine direkte Klassenregel könnte möglicherweise aus wenigen aggregierten Eigenschaften des Wegprofils hervorgehen, ohne den vollständigen Abstieg explizit nachzubilden.

20.4 Rückwärtsbäume als Klassifikationsobjekte

Die vier Klassen besitzen vollständige inverse Erzeugungsbäume.

Für einen Knoten M entstehen seine Vorgänger aus

$$N = M + T_m$$

unter der Bedingung

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq M \leq \frac{m(m+1)}{2} - 1.$$

Eine mögliche direkte Charakterisierung könnte daher nicht aus dem Vorwärtsabstieg, sondern aus strukturellen Eigenschaften der vier Rückwärtsbäume hervorgehen.

Zu untersuchen sind unter anderem:

Verzweigungsgrade,
zulässige Indexfolgen,
fehlende Vorgängermuster,
Dichteentwicklung der Baumebenen

und

symbolische Signaturen der vier Wurzeln.

20.5 Erklärung der 6-Voids

Die großen 6-Voids stellen eines der deutlichsten offenen Strukturprobleme dar. Gesucht wird eine direkte arithmetische Beschreibung der Intervalle

$$[a_k, b_k],$$

in denen

$$E(N) \neq 6$$

für alle

$$a_k \leq N \leq b_k$$

gilt.

Insbesondere ist zu klären, weshalb die größten beobachteten Void-Längen und ihre Beginnpunkte eine annähernde Verdopplungsstruktur besitzen.

Eine vollständige Theorie müsste nicht nur die Nullzone erklären, sondern auch die beobachteten Vor- und Nachzonen sowie den Übergang zwischen unterschiedlichen lokalen Grammatiken.

20.6 Globale Verteilungsgesetze

Die gemessenen Klassenanteile

$$P_1 \approx 29,34 \%,$$

$$P_2 \approx 39,39 \%,$$

$$P_3 \approx 19,41 \%,$$

$$P_6 \approx 11,85 \%$$

werfen die Frage nach möglichen asymptotischen Dichten auf.

Es ist offen, ob die Grenzwerte

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{C_e(X)}{X}$$

für alle

$$e \in \{1, 2, 3, 6\}$$

existieren.

Ebenso ist unbekannt, ob die innerhalb der ersten Milliarde beobachtete Rangfolge

$$2 > 1 > 3 > 6$$

global erhalten bleibt.

20.7 Verbotene Muster

Innerhalb der Milliardenestreihe wurden 23 Vierermuster nicht beobachtet.

Zu prüfen ist, ob diese Muster lediglich im untersuchten Bereich fehlen oder ob einige von ihnen allgemein unmöglich sind.

Ein formaler Ausschluss eines Vierermusters

$$(a, b, c, d)$$

würde bedeuten, dass keine positive natürliche Zahl N existiert mit

$$E(N) = a,$$

$$E(N + 1) = b,$$

$$E(N + 2) = c,$$

$$E(N + 3) = d.$$

Ein solcher Satz würde eine direkte lokale Restriktion der Endwertfunktion darstellen und könnte wichtige Hinweise auf ihre unbekannte arithmetische Form liefern.

20.8 Zukünftige Untersuchungen

Die vorliegende Arbeit löst die terminale Vollständigkeitsfrage und dokumentiert die erste großräumige empirische Struktur der vier Klassen.

Sie beansprucht nicht, sämtliche daraus entstehenden Fragen bereits zu beantworten.

Insbesondere die folgenden Themen bleiben zukünftigen Arbeiten vorbehalten:

exakte Theorie der Abstiegsdauer,

direkte Klassenarithmetik,

asymptotische Klassendichten,

Theorie der 6-Voids,

formale Musterverbote

und

vollständige Struktur der vier Rückwärtsbäume.

Die in dieser Arbeit angegebenen Hypothesen sollen diese Untersuchungen gezielt ermöglichen und nicht durch voreilige Verallgemeinerungen vorwegnehmen.

21. Schlussbetrachtung

21.1 Gesicherte mathematische Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit untersucht den rekursiven Dreieckszahlenabstieg

$$F(N) = N - T_{t(N)},$$

mit

$$t(N) = \left\lfloor \frac{\sqrt{4N+1} + 1}{2} \right\rfloor$$

und

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Für jeden positiven nichtterminalen Ausgangswert gilt

$$1 \leq F(N) < N.$$

Jeder Abstiegsweg ist daher streng fallend und erreicht nach endlich vielen Schritten einen positiven terminalen Wert. Da der Operator deterministisch ist, besitzt jedes

$$N \in \mathbb{N}_{>0}$$

einen eindeutig bestimmten Endwert.

Die vollständige Untersuchung der Terminalbedingung zeigt, dass ausschließlich

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6$$

als positive Endwerte möglich sind. Damit wurde das kanonische Triatrad definiert als

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Für die Endwertfunktion

$$E: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathcal{T}$$

gilt somit für jedes positive natürliche N

$$E(N) \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Ein fünfter positiver Endwert ist ausgeschlossen.

Aus der Eindeutigkeit der Endwertfunktion folgen die vier Klassen

$$\mathcal{C}_e = \{N \in \mathbb{N}_{>0} : E(N) = e\}, \quad e \in \{1, 2, 3, 6\}.$$

Diese Klassen bilden eine disjunkte und vollständige Zerlegung:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6.$$

In der gerichteten Graphendarstellung besitzt jeder nichtterminale Wert genau einen ausgehenden Abstiegsweg. Die vier terminalen Werte bilden die Wurzeln der zugehörigen inversen Bäume. Damit entsteht eine kanonische Vierbaumzerlegung der positiven natürlichen Zahlen.

Die grundlegende mathematische Aussage dieser Arbeit lautet daher:

Jede positive natürliche Zahl gehört eindeutig genau einem der vier Triatrad-Bäume an.

21.2 Rekursion und direkte Klassifikation

Die rekursive Endwertbestimmung ist vollständig definiert:

$$E(N) = E(F(N))$$

für jeden nichtterminalen Wert N , gemeinsam mit den Anfangswerten

$$E(1) = 1, \quad E(2) = 2, \quad E(3) = 3, \quad E(6) = 6.$$

Damit kann die Klasse jedes positiven natürlichen Wertes durch wiederholte Anwendung des Operators bestimmt werden.

Diese rekursive Bestimmbarkeit ist jedoch nicht mit einer direkten arithmetischen Charakterisierung gleichzusetzen. Derzeit ist keine geschlossene Regel bekannt, die allein aus dem ursprünglichen Wert N ohne Ausführung des Abstiegs unmittelbar erkennen lässt, welcher der vier Endwerte erreicht wird.

Das zentrale Klassifikationsproblem bleibt daher offen:

Welche intrinsische arithmetische Eigenschaft von N bestimmt $E(N)$?

Gesucht ist eine direkte Abbildung

$$\Phi: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \{1,2,3,6\}$$

mit

$$\Phi(N) = E(N)$$

für alle positiven natürlichen Zahlen.

Der Triatrad-Satz beantwortet vollständig, welche Endwerte möglich sind. Er beantwortet noch nicht, weshalb ein bestimmtes N gerade einem bestimmten der vier Bäume angehört.

21.3 Ergebnisse der numerischen Hauptuntersuchung

Die Endwertfunktion wurde für genau eine Milliarde aufeinanderfolgende natürliche Zahlen im Bereich

$$10 \leq N \leq 1.000.000.009$$

berechnet.

Die vollständige Verteilung lautete:

$$E(N) = 1: 293.421.555,$$

$$E(N) = 2: 393.924.939,$$

$$E(N) = 3: 194.130.342,$$

$$E(N) = 6: 118.523.164.$$

Dies entspricht den Anteilen

$$P_1 = 29,3421555 \%,$$

$$P_2 = 39,3924939 \%,$$

$$P_3 = 19,4130342 \%,$$

$$P_6 = 11,8523164 \%.$$

Die globale Rangfolge lautet damit

$$2 > 1 > 3 > 6.$$

Die vier Klassen treten nicht gleich häufig auf. Zugleich liegt die Verteilung grob in der Nähe des Verhältnisses

$$3: 4: 2: 1,$$

weist jedoch eine erkennbare Verschiebung zugunsten der Klasse 6 gegenüber dieser einfachen Referenz auf.

Die globale Verteilung ist nur die erste empirische Ebene. Sie beschreibt die Gesamtgewichte der vier Bäume, nicht deren Anordnung entlang der natürlichen Zahlen.

21.4 Lokale Ordnung der Endwertfolge

Die Untersuchung benachbarter Endwerte zeigte, dass die Klassen nicht unabhängig voneinander auftreten.

Die Folge

$$E(10), E(11), \dots, E(1.000.000.009)$$

besitzt gerichtete Übergänge, stark ungleiche Musterhäufigkeiten und klassenspezifische Wiederholungsgrenzen.

Besonders häufig erscheinen lokale Bewegungen der Form

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Die Klasse 2 wirkt dabei häufig als Verzweigungspunkt. Von ihr führt die lokale Folge bevorzugt zu 3 oder 6. Beide Zweige kehren anschließend häufig zur Klasse 1 zurück. Diese vereinfachte Grammatik ist keine ausnahmslose Regel. Sie beschreibt jedoch die statistisch dominante lokale Bewegung.

Unter den 64 möglichen Dreiermustern treten alle Kombinationen auf. Ihre Häufigkeiten unterscheiden sich jedoch um mehrere Millionen zu eins. Das häufigste Dreiermuster

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

wurde mehr als 107 Millionen Mal beobachtet, während

$$3 \rightarrow 6 \rightarrow 3$$

nur 24 Mal auftrat.

Bei den Vierermustern treten erstmals vollständig fehlende Folgen auf. Von den

$$4^4 = 256$$

theoretisch möglichen Viererwörtern wurden innerhalb der Milliardentestreihe

$$23$$

kein einziges Mal beobachtet.

Damit besitzt die Endwertfolge eine deutlich eingeschränkte lokale Übergangsstruktur.

21.5 Die Sonderstellung der Klassen 3 und 6

Die Klassen 3 und 6 zeigen eine bemerkenswerte Beziehung.

In großräumigen Verteilungen scheinen sie sich teilweise gegenseitig zu ersetzen.

Insbesondere steigt der Anteil der Klasse 3 in großen 6-freien Bereichen stark an.

Lokal stehen die beiden Klassen jedoch nur äußerst selten unmittelbar nebeneinander. Gerade Muster mit engen Wechseln zwischen 3 und 6 gehören zu den seltensten Dreierfolgen der gesamten Untersuchung.

Die empirische Beziehung kann daher zusammengefasst werden als

großräumige Kopplung bei lokaler Trennung.

Dies deutet darauf hin, dass beide Klassen möglicherweise alternative Rollen innerhalb derselben übergeordneten Struktur einnehmen, ohne häufig direkt ineinander überzugehen.

21.6 Die 6-Voids als stärkster großräumiger Befund

Der markanteste empirische Befund betrifft die ausgedehnten Intervalle, in denen die Klasse 6 vollständig fehlt.

Der größte innerhalb der ersten Milliarde beobachtete 6-Void beginnt bei

783.765.283

und besitzt die Länge

34.147.153.

Für mehr als 34 Millionen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt dort

$$E(N) \neq 6.$$

Die zehn größten beobachteten 6-Voids zeigen sowohl in ihren Längen als auch in ihren Lagen eine auffällige annähernde Verdopplungsstruktur.

Die Void-Längen reichen in dieser Folge von

69.461

bis

34.147.153.

Näherungsweise gilt über mehrere Stufen

$$V_{k+1} \approx 2V_k.$$

Eine unabhängige zufällige Anordnung mit derselben globalen 6-Häufigkeit würde Voids dieser Größenordnung nicht plausibel erklären. Der Zufallsvergleich dient dabei ausschließlich als Referenzmodell, da die Triatrad-Folge selbst vollständig deterministisch ist.

Die 6-Voids zeigen, dass die Klasse 6 nicht lediglich global seltener auftritt. Sie besitzt eine eigene großräumige Geometrie.

21.7 Voids als eigenständige Verteilungsregime

Innerhalb der großen 6-Voids verschwindet nicht nur die Klasse 6. Die gesamte lokale Verteilung verändert sich.

Außerhalb der Voids besitzt die Klasse 2 einen Anteil von nahezu 40 %, während die Klasse 3 bei ungefähr 18,5 % liegt.

Innerhalb der Voids verschiebt sich die Verteilung näherungsweise zu

$$\begin{aligned}P_1 &\approx 37,24 \%, \\P_2 &\approx 31,99 \%, \\P_3 &\approx 30,77 \%, \\P_6 &= 0.\end{aligned}$$

Die fehlende Klasse 6 wird nicht einfach proportional auf die drei übrigen Klassen verteilt. Besonders die Klasse 3 gewinnt erheblich, während die Klasse 2 trotz des Ausfalls der 6 an Anteil verliert.

Die Umstellung kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$6 \downarrow 0, \quad 3 \uparrow\uparrow, \quad 1 \uparrow, \quad 2 \downarrow.$$

Der Regimewechsel beginnt bereits vor dem eigentlichen Void und klingt nach dessen Ende nur verzögert ab.

Damit besitzen die großen 6-Voids eine Vorzone, eine vollständige Nullzone und eine Nachzone.

21.8 Veränderung der Übergangsgrammatik in den Voids

Auch die Übergänge benachbarter Endwerte verändern sich innerhalb der Voids.

Außerhalb der Voids bildet

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$$

einen der beiden dominierenden Zweige.

Innerhalb eines 6-Voids ist dieser Weg vollständig ausgeschlossen. An seine Stelle treten verstärkt

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

Besonders deutlich wird die Bindung

$$1 \leftrightarrow 3.$$

Innerhalb der Voids folgt auf einen Wert der Klasse 3 mit einer bedingten Wahrscheinlichkeit von ungefähr

98,39 %

ein Wert der Klasse 1.

Die Void-Struktur ist damit nicht nur eine lokale Häufigkeitsverschiebung. Sie besitzt eine eigene Übergangsgrammatik.

21.9 Bedeutung der empirischen Ergebnisse

Die empirischen Befunde beweisen noch keine direkte Klassenarithmetik. Sie zeigen jedoch, dass die Endwertfolge nicht als unstrukturierte vierwertige Zuordnung verstanden werden kann.

Beobachtet wurden:

ungleiche globale Klassenanteile,
gerichtete Nachbarschaftsbeziehungen,
stark konzentrierte Klassenwörter,
vollständig fehlende Vierermuster,
klassenspezifische Lauflängen,
skalierende 6-Voids

und

regional wechselnde Übergangsgrammatiken.

Diese Eigenschaften müssen durch jede zukünftige direkte Theorie der Endwertfunktion gemeinsam erklärt werden.

Eine mögliche Klassenregel darf daher nicht nur die globale Häufigkeit reproduzieren. Sie muss auch lokale Übergänge, Musterverbote, Void-Grenzen und Regimewechsel erfassen.

21.10 Entdeckungsgeschichte in KQ

Das Triatrad wurde zunächst innerhalb von KQ sichtbar.

Frühe Abstiegsuntersuchungen zeigten die Endwerte

$$1, \quad 2, \quad 3.$$

Die KQ-Struktur ließ jedoch eine vierte terminale Klasse erwarten. Diese wurde rekursiv als

$$6$$

bestimmt, bevor ein allgemeiner klassischer Vollständigkeitsbeweis vorlag.

Die anschließende gezielte Suche nach einem nichtterminalen Ausgangswert mit Endwert 6 führte schließlich auf

$$82 \rightarrow 37 \rightarrow 16 \rightarrow 6.$$

Damit wurde die strukturelle Vorhersage durch einen konkreten Abstiegsweg bestätigt. KQ diente somit als Entdeckungsraum. Der später entwickelte Triatrad-Satz liefert dagegen die unabhängige allgemeine Begründung dafür, dass ausschließlich

$$\{1,2,3,6\}$$

als positive terminale Werte möglich sind.

21.11 Hypothese zur Abstiegsdauer

Die Untersuchungen sehr großer Ausgangswerte führten zu einer weiteren Hypothese.

Für geprüfte Werte mit einer tatsächlichen Bitlänge von 2048 wurden ungefähr

$$2046$$

vollständige Abstiegsstufen beobachtet.

Für geprüfte Werte mit einer Bitlänge von 4096 lagen die Abstiegszahlen ungefähr bei

$$4093 \text{ bis } 4096.$$

Daraus ergibt sich die empirische Näherung

$$L(N) \approx \text{bitlen}(N).$$

Diese Beobachtung ist mit der asymptotischen Form des Operators vereinbar. Für große N gilt

$$F(N) \approx \frac{N}{2}.$$

Eine Halbierung reduziert die Binärlänge im Mittel um ungefähr ein Bit. Der Abstieg kann daher als schrittweise Reduktion der Größeninformation verstanden werden.

Die Aussage ist ausdrücklich als Hypothese formuliert. Insbesondere ist noch offen, welche exakten Schranken für

$$L(N) - \text{bitlen}(N)$$

gelten und ob die Abweichung global beschränkt ist.

21.12 Größeninformation und terminale Klasseninformation

Die Abstiegsdauer und die Endwertklasse beschreiben zwei unterschiedliche Eigenschaften des Weges.

Die asymptotische Halbierung bestimmt die grobe Größenentwicklung:

$$N_k \approx \frac{N_0}{2^k}.$$

Sie erklärt, weshalb die Weglänge ungefähr der Bitlänge folgt. Sie erklärt jedoch nicht, welcher der vier Endwerte erreicht wird.

Die terminale Klasseninformation liegt in den diskreten Abweichungen von der idealen Halbierung. Schreibt man

$$N_k = m_k(m_k - 1) + r_k,$$

so gilt

$$N_{k+1} = \frac{N_k}{2} + \delta_k$$

mit

$$\delta_k = \frac{r_k}{2} - m_k.$$

Wegen

$$0 \leq r_k \leq 2m_k - 1$$

gilt stets

$$\delta_k \leq -\frac{1}{2}.$$

Jeder Abstiegsübergang fällt daher stärker als eine exakte Halbierung aus. Die genaue Stärke dieser zusätzlichen Verminderung hängt von der jeweiligen Intervallposition r_k ab.

Die grobe Größeninformation wird während des Abstiegs schrittweise reduziert. Am Ende verbleibt jedoch eine vierwertige Information:

$$E(N) \in 1,2,3,6.$$

Diese terminale Information ordnet den ursprünglichen Wert eindeutig einem der vier Bäume zu.

21.13 Offene Hauptprobleme

Aus der vorliegenden Arbeit ergeben sich mehrere klar umrissene Forschungsfragen. Die wichtigste bleibt die direkte Klassifikation:

Existiert eine geschlossene arithmetische Regel für $E(N)$?

Daneben sind insbesondere folgende Fragen offen:

Existieren asymptotische Dichten der vier Klassen?

Wie lassen sich die großen 6-Voids direkt beschreiben?

Setzt sich ihre Verdopplungsstruktur für größere N fort?

Sind die nicht beobachteten Vierermuster allgemein verboten?

Besitzen die vier Rückwärtsbäume charakteristische Signaturen?

Welche exakten Schranken gelten für die Abstiegsdauer?

Bestimmt die Folge der Halbierungskorrekturen den Endwert direkt?

Diese Fragen werden durch den Triatrad-Satz nicht beantwortet. Der Satz liefert jedoch erstmals den festen mathematischen Rahmen, innerhalb dessen sie präzise gestellt werden können.

21.14 Grenzen der vorliegenden Untersuchung

Die theoretischen Aussagen zur Endlichkeit, Eindeutigkeit und vollständigen Terminalmenge gelten für alle positiven natürlichen Zahlen.

Die empirischen Verteilungs-, Übergangs- und Void-Ergebnisse beziehen sich dagegen auf den untersuchten Bereich

$$10 \leq N \leq 1.000.000.009.$$

Aus der Milliardenrestreihe folgt nicht automatisch, dass alle beobachteten Häufigkeiten, Muster und Skalierungen unverändert bis ins Unendliche fortbestehen. Insbesondere sind die gemessenen Klassenanteile keine bewiesenen Grenzdichten. Die Verdopplungsstruktur der 6-Voids ist ein starker empirischer Befund, aber noch kein allgemeines Gesetz. Ebenso ist das Fehlen bestimmter Vierermuster innerhalb der Milliarde noch kein globaler Unmöglichkeitbeweis.

Die Untersuchung liefert eine erste großräumige Kartierung des Triatrad. Sie bildet eine Ausgangsbasis für weiterführende Beweise und größere Testreihen.

21.15 Wissenschaftliche Einordnung

Das kanonische Triatrad besitzt drei voneinander zu unterscheidende Ebenen.

Erstens ist es eine bewiesene terminale Menge:

$$\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Zweitens erzeugt es eine vollständige Partition der positiven natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6.$$

Drittens bildet es ein offenes arithmetisches Klassifikationsproblem, da die direkte Ursache der Zuordnung

$$N \mapsto E(N)$$

noch unbekannt ist.

Die theoretische Ebene beweist die Existenz der vier Klassen. Die empirische Ebene zeigt, dass diese Klassen eine komplexe lokale und großräumige Ordnung besitzen. Die offene arithmetische Ebene fragt nach dem verborgenen Mechanismus hinter dieser Ordnung.

21.16 Abschließende Bewertung

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass der rekursive Dreieckszahlenabstieg nicht in einer beliebigen Menge kleiner Restwerte endet. Sämtliche positiven natürlichen Zahlen werden auf genau vier terminale Werte zurückgeführt.

Diese vier Werte bilden keine bloße Liste von Ausnahmen. Sie sind die Wurzeln einer vollständigen Vierbaumzerlegung der positiven natürlichen Zahlen.

Die Milliardentestreihe zeigt darüber hinaus, dass die vier Bäume entlang der Zahlenachse nicht beliebig ineinandergreifen. Ihre Mitglieder bilden gerichtete Übergänge, stark gewichtete Klassenwörter, lokal ausgeschlossene Muster und großräumige Verteilungsregime.

Besonders die Klasse 6 besitzt eine außergewöhnliche räumliche Struktur. Ihre ausgedehnten Voids und die damit verbundenen Veränderungen der übrigen Klassen deuten auf einen bislang unbekannten deterministischen Ordnungsmechanismus hin.

Die zentrale Aufgabe zukünftiger Forschung besteht daher nicht mehr darin, die möglichen Endwerte zu finden. Diese sind vollständig bestimmt.

Die verbleibende Aufgabe lautet:

Die direkte arithmetische Ursache der Vierbaumzuordnung zu bestimmen.

Das kanonische Triatrad ist damit zugleich ein bewiesenes terminales System, eine vollständige Vierbaumzerlegung der positiven natürlichen Zahlen und der Ausgangspunkt eines offenen arithmetischen Klassifikationsproblems.

Lizenzhinweis zur Nutzung dieses Dokuments

Das vorliegende Werk einschließlich aller darin enthaltenen Begriffe, Modelle und Darstellungen, insbesondere die Konzepte, ist urheberrechtlich geschützt.

Die Nutzung ist unter folgenden Bedingungen gestattet:

- Die wissenschaftliche Nutzung (einschließlich Zitierung, Weiterentwicklung in akademischen Kontexten, Verwendung zu Lehr- und Forschungszwecken) ist uneingeschränkt gestattet, sofern auf den Ursprung des Werks in angemessener Weise verwiesen wird.
- Die private Nutzung, d. h. die nicht-kommerzielle Verwendung im persönlichen, nicht-institutionellen Rahmen (z. B. individuelle Anwendungen, private Weiterverarbeitung, nicht öffentliche Weitergabe), ist ebenfalls gestattet, unter Beibehaltung der vollständigen Herkunftsangabe.
- Kommerzielle Nutzung – darunter fallen unter anderem jede Art von kommerzieller Softwareintegration, kommerzielle Beratung, industrielle Anwendung, Lizenzweitergabe oder technische Implementierung in Produkten oder Dienstleistungen – ist nur nach ausdrücklicher schriftlicher Zustimmung des Urhebers und dem Abschluss eines entsprechenden Lizenzvertrags zulässig.

Jegliche Form der kommerziellen Verwertung ohne Lizenz stellt eine Verletzung des Urheberrechts dar und kann/wird rechtlich verfolgt werden.

Dieses Werk steht unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-NC 4.0 International.

Wissenschaftliche und private Nutzung sind unter Namensnennung gestattet.

Kommerzielle Nutzung nur mit vorheriger schriftlicher Zustimmung des Autors.

Lizenztext: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Zitierhinweis:

Meißner, A. (2026). Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen. Eine Vierbaumzerlegung und das offene Problem der terminalen Klassenzuordnung. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21603457>.

(online verfügbar unter: <https://doi.org/10.5281/zenodo.21603457>)

Literaturverzeichnis

Meißner, A. (2025a). *Geometrien des Faktorisierungsproblems: Ein analytischer Zugang über KQ-Gruppen*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.16318813>

Meißner, A. (2025b). *KQ-KFS-Strukturen: Zur geometrischen Emergenz arithmetischer Realität. Eine Analyse Kanonisch-Quasiquadratischer Gruppen (KQ) und K-Fokaler-Schalenstrukturen (KFS) als Strukturformen informationstragender Räume*. Zenodo.
<https://doi.org/10.5281/ZENODO.15683651>

Meißner, A. (2025c). *Monoinformation: Architektur rekursiv erzeugter Informationsräume. Fokale Raumadressierung (KRA) aus der Emergenz strukturierter Superpositionierung*. Zenodo.
<https://doi.org/10.5281/ZENODO.15711824>