Die 6-Voids des kanonischen Triatrads

Arithmetische Herleitung makroskopischer Lücken im Rückwärtsbaum C_6

Version 1:
Datum Veröffentlichung: 20.08.2026

Achim Meißner

Email: service@ameis-web.de

1 Die makroskopischen 6-Voids

1.1 Bisheriger Stand

Im Paper *Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen*[1] wurde eine vollständige Zerlegung der positiven natürlichen Zahlen in vier disjunkte Rückwärtsbäume mit den terminalen Werten $1,2,3,6$ beschrieben. Im Rahmen der dortigen großskaligen numerischen Untersuchung fiel insbesondere die Klasse mit Terminalwert 6 durch ausgedehnte zusammenhängende Intervalle auf, in denen kein einziger Wert dieser Klasse vorkommt. Diese Intervalle wurden als 6-Voids bezeichnet. Die ursprüngliche Untersuchung zeigte unter anderem einen 6-Void mit mehr als 34 Millionen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Seine strukturelle Ursache blieb dort offen. Die inzwischen entwickelte Rückwärtsanalyse des 6-Baumes liefert eine vollständige Erklärung dieser makroskopischen Voids. Sie zeigt, dass diese nicht als zufällige Lücken innerhalb der Klasse entstehen, sondern als Zwischenräume zwischen aufeinanderfolgenden Tiefenschichten des Rückwärtsbaumes. Dabei werden die Grenzen der beobachteten Voids allein aus der Rückwärtsstruktur bestimmt.

Eine zusätzliche empirische Prüfung ergab inzwischen den unmittelbar folgenden Makro-Void

$$1\,567\,587\,904 \leq N \leq 1\,635\,831\,670$$

mit der Länge

$$68\,243\,767.$$

Dieser Bereich war zuvor aus der Rückwärtsstruktur berechnet worden. Die anschließende unabhängige Vorwärtsvermessung bestätigte sowohl Anfang und Ende als auch die Länge des vorhergesagten Voids exakt. Der letzte Wert der Klasse C_6 vor dem Void ist $1\,567\,587\,903$, der erste danach $1\,635\,831\,671$.

1.2 Herleitung und Beweis der 6-Voids

Für einen Terminalwert $c \in \{1,2,3,6\}$ sei

[1] Meißner, A. (26.07.20226). Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen. Eine Vierbaumzerlegung und das offene Problem der terminalen Klassenzuordnung. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.21603457

$$D_c(k)$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die nach genau k Abstiegsschritten den Terminalwert c erreichen. Für den Rückwärtsbaum C_6 werden die beiden äußeren Grenzen einer solchen Tiefenschicht durch

$$L_k = \min D_6(k)$$

und

$$U_k = \max D_6(k)$$

definiert.

Für einen beliebigen Knoten X des Rückwärtsbaumes entstehen seine Vorgänger in der Form

$$N = X + T_m,$$

wobei $T_m = m(m+1)/2$ die m-te Dreieckszahl bezeichnet. Ein Index m ist genau dann zulässig, wenn

$$\frac{m(m-3)}{2} < X \leq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Liegt X zwischen zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen,

$$T_{r-1} \leq X < T_r,$$

so besitzt X genau zwei reguläre Vorgänger mit den Indizes r und $r+1$. Im Spezialfall

$$X = T_r - 1$$

tritt zusätzlich ein dritter Vorgänger mit Index $r+2$ auf. Weitere unmittelbare Vorgänger existieren nicht.

Da sowohl der kleinste als auch der größte Vorgänger monoton mit dem Ausgangsknoten wachsen, müssen zur Bestimmung der äußeren Grenzen einer neuen Tiefenschicht nicht sämtliche inneren Knoten des Baumes erzeugt werden. Es genügt die Rekursion

$$L_{k+1} = P_-(L_k),$$

$$U_{k+1} = P_+(U_k),$$

wobei P_- beziehungsweise P_+ den kleinsten beziehungsweise größten zulässigen Vorgänger bezeichnet.

Liegt nun die obere Grenze einer Tiefenschicht strikt vor der unteren Grenze der folgenden Tiefenschicht,

$$U_k < L_{k+1},$$

so kann kein Element des 6-Baumes zwischen diesen beiden Grenzen liegen. Das Intervall

$$V_k = [U_k + 1, L_{k+1} - 1]$$

ist damit vollständig frei von Zahlen mit Terminalwert 6. Seine Länge beträgt

$$|V_k| = L_{k+1} - U_k - 1.$$

Die makroskopischen 6-Voids sind somit unmittelbar die Zwischenräume aufeinanderfolgender Tiefenschichten des Rückwärtsbaumes.
Setzt man

$$H_k = L_{k+1} - U_k,$$

so folgt aus dem Wachstum der beiden inversen Randabbildungen die Abschätzung

$$H_{k+1} \geq 2H_k - 2\sqrt{2U_k} - 5.$$

Für die elfte betrachtete Tiefenschicht gilt bereits

$$L_{11} = 24\,761, \qquad U_{11} = 47\,037, \qquad L_{12} = 49\,737$$

und damit

$$H_{11} = 2700 > 12\sqrt{47\,037}.$$

Unter der Annahme

$$H_k \geq 12\sqrt{U_k}$$

folgt

$$H_{k+1} \geq 24\sqrt{U_k} - 2\sqrt{2}\,\sqrt{U_k} - 5.$$

Zugleich gilt die obere Wachstumsabschätzung

$$U_{k+1} \leq 3U_k.$$

Da

$$24 - 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} > 0$$

und die verbleibende positive Differenz für $U_k \geq 47\,037$ bereits die additive Konstante 5 übersteigt, folgt

$$H_k \geq 12\sqrt{U_k} \quad \Rightarrow \quad H_{k+1} \geq 12\sqrt{U_{k+1}}.$$

Durch vollständige Induktion gilt diese Ungleichung für alle $k \geq 11$. Da U_k unbeschränkt wächst, folgt damit

$$H_k \to \infty$$

und folglich

$$|V_k| = H_k - 1 \to \infty.$$

Damit existieren unendlich viele makroskopische 6-Voids, und ihre Längen sind unbeschränkt.

Die Terminalwerte $1,2,3$ zeigen unter derselben Rückwärtsanalyse ein anderes Verhalten. Bei ihren Rückwärtsbäumen beginnen sich die Spannbereiche aufeinanderfolgender Tiefenschichten nach endlich vielen Schritten zu überlappen. Für C_1 tritt dies ab Tiefe 3, für C_2 ab Tiefe 1 und für C_3 ab Tiefe 4 auf. Aufgrund der Monotonie der inversen Randabbildungen bleibt eine einmal eingetretene Überlappung erhalten. Der für C_6 wirksame Mechanismus fortlaufender makroskopischer Zwischenräume kann daher bei diesen drei Terminalbäumen nicht auftreten.

1.3 Übereinstimmung von Herleitung und Empirie

Die aus den äußeren Grenzen des Rückwärtsbaumes berechneten Makro-Voids stimmen mit den unabhängig durch Vorwärtsiteration gefundenen 6-Voids exakt überein. Für die erste Milliarde natürlicher Zahlen wurden zwölf aufeinanderfolgende Makro-Voids bestätigt. Der anschließend aus der Rückwärtsstruktur bestimmte nächste Void wurde durch die Untersuchung der zweiten Milliarde ebenfalls positionsgenau bestätigt.

Nr.	empirischer Bereich	empirische Länge	aus dem Beweis berechneter Bereich	berechnete Länge
1	380.543 bis 398.583	18.041	380.543 bis 398.583	18.041
2	762.044 bis 797.754	35.711	762.044 bis 797.754	35.711
3	1.526.510 bis 1.595.970	69.461	1.526.510 bis 1.595.970	69.461
4	3.055.136 bis 3.193.548	138.413	3.055.136 bis 3.193.548	138.413

Nr.	empirischer Bereich	empirische Länge	aus dem Beweis berechneter Bereich	berechnete Länge
5	6.114.237 bis 6.387.676	273.440	6.114.237 bis 6.387.676	273.440
6	12.233.988 bis 12.776.201	542.214	12.233.988 bis 12.776.201	542.214
7	24.477.814 bis 25.555.241	1.077.428	24.477.814 bis 25.555.241	1.077.428
8	48.967.315 bis 51.112.916	2.145.602	48.967.315 bis 51.112.916	2.145.602
9	97.947.568 bis 102.234.132	4.286.565	97.947.568 bis 102.234.132	4.286.565
10	195.912.571 bis 204.471.982	8.559.412	195.912.571 bis 204.471.982	8.559.412
11	391.863.277 bis 408.946.735	17.083.459	391.863.277 bis 408.946.735	17.083.459
12	783.765.283 bis 817.912.435	34.147.153	783.765.283 bis 817.912.435	34.147.153
13	1.567.587.904 bis 1.635.831.670	68.243.767	1.567.587.904 bis 1.635.831.670	68.243.767

Für alle dreizehn betrachteten Makro-Voids gilt damit positionsgenau

$$V_k^{\mathrm{emp}} = V_k^{\mathrm{theor}}.$$

Die Übereinstimmung betrifft jeweils Anfang, Ende und Länge des Intervalls. Insbesondere wurde der dreizehnte Void nicht zur Bestimmung der Rückwärtsstruktur verwendet, sondern erst nach seiner theoretischen Berechnung durch die unabhängige Vorwärtsvermessung bestätigt.

1.4 Schlussbemerkung

Die im ursprünglichen Triatrad-Paper empirisch beobachteten makroskopischen 6-Voids sind damit arithmetisch erklärt. Sie entstehen als notwendige Zwischenräume aufeinanderfolgender Tiefenschichten des Rückwärtsbaumes C_6. Es existieren unendlich viele solcher Voids, und ihre Längen sind unbeschränkt.

Die unabhängige empirische Vermessung bestätigt die aus der Rückwärtsstruktur bestimmten Intervalle für dreizehn aufeinanderfolgende Makro-Voids exakt. Die im Triatrad-Paper offengebliebene Frage nach der Ursache der makroskopischen 6-Voids ist damit beantwortet. Kleinere interne Lücken innerhalb einzelner Tiefenschichten sind nicht Gegenstand dieser Arbeit.