Die Bitstruktur des kanonischen Triatrads

Exakter Einbit-Abstieg, beschränkte Zweibit-Sprünge und die KQ-Trichtergeometrie

Version 1:
Datum Veröffentlichung: 20.08.2026

Achim Meißner

Email: service@ameis-web.de

Inhalt

1 Bitlängenstruktur des Triatrad-Abstiegs 2
1.1 Empirischer Ausgangspunkt 2
1.2 Exakter Bitverlust eines einzelnen Abstiegs 3
1.3 Beschränkung der Zweibit-Sprünge 4
1.4 Pfadlänge und Bitlänge 8
1.5 Zweibit-Sprünge bei beliebig großen Ausgangswerten 9
2 KQ-Struktur und Trichtergeometrie 11
2.1 Verwendete KQ-Metadaten 11
2.2 Die Verjüngung der KQ-Gruppen 12
3 Verbindung zwischen KQ und Triatrad 14
3.1 Dreieckszahlen als halbierte Rechteckstruktur 14
3.2 Der Triatrad-Operator in KQ-Koordinaten 14
3.3 Die vier Terminalwerte am Boden des KQ-Trichters 15
4 Inverse Verzweigung und Informationsstruktur 17
4.1 Zwei reguläre Vorgänger 17
4.2 Seltenheit der Dreifachverzweigungen 18
4.3 KQ-Interpretation der Rückwärtsmehrdeutigkeit 18
5 Schlussbetrachtung 20

1 Bitlängenstruktur des Triatrad-Abstiegs

1.1 Empirischer Ausgangspunkt

Für den kanonischen Triatrad-Operator[1]

$$F(N) = N - T_{t(N)}$$

mit

$$T_m = \frac{m(m+1)}{2}$$

und dem eindeutig bestimmten Index

$$m = t(N), \qquad m(m-1) \leq N < m(m+1),$$

wurde zunächst empirisch untersucht, wie sich die binäre Bitlänge eines Startwertes entlang des vollständigen Abstiegs bis zu einem Terminalwert

$$E(N) \in \{1,2,3,6\}$$

verändert.

Hierzu wurden vollständige Abstiegswege für Startwerte mit Bitlängen von 128, 256, 512, 1024, 2048 und 4096 Bit ausgewertet. Die Auswertung umfasste 600 vollständige Abstiegswege mit insgesamt 1026 beobachteten Zweibit-Sprüngen. Die untersuchten Wege zeigten ein auffällig starres Verhalten. Der überwiegende Teil aller Operatoranwendungen verringerte die Bitlänge exakt um ein Bit. Unter sämtlichen beobachteten Schritten mit größerem Bitverlust trat ausschließlich ein Verlust von zwei Bit auf; ein Verlust von drei oder mehr Bit wurde nicht beobachtet.

Auch die Häufigkeit dieser Zweibit-Sprünge blieb über die stark unterschiedlichen Ausgangsgrößen nahezu konstant. Im Mittel traten etwa 1,7 Zweibit-Sprünge pro vollständigem Abstiegsweg auf. Die zusätzlichen Bitverluste konzentrierten sich dabei fast vollständig auf den unteren Bereich der Abstiegswege. Von den beobachteten Zweibit-Sprüngen lagen 91,7 % bei einer aktuellen Bitlänge von höchstens 10 Bit und 99,8 % bei höchstens 20 Bit. Der höchste beobachtete Zweibit-Sprung trat bei einer aktuellen Bitlänge von 27 Bit auf.

[1] Meißner, A. (2026). Das kanonische Triatrad der natürlichen Zahlen. Eine Vierbaumzerlegung und das offene Problem der terminalen Klassenzuordnung. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.21603457

Damit ergab sich empirisch ein wesentlich schärferes Bild als eine lediglich asymptotische Halbierung des Startwertes. Für große Teile eines vollständigen Abstiegs wurde nicht nur näherungsweise, sondern positionsweise exakt das Schema

$$b \to b-1 \to b-2 \to b-3 \to \cdots$$

beobachtet. Die wenigen Abweichungen bestanden ausschließlich aus einzelnen Übergängen der Form

$$b \to b-2.$$

Die folgende Untersuchung zeigt, dass dieses Verhalten strukturell erzwungen ist. Jeder nichtterminale Triatrad-Schritt verliert exakt ein oder zwei Bit an Bitlänge. Darüber hinaus ist die Zahl der Zweibit-Sprünge auf einem vollständigen Abstiegsweg global beschränkt.

1.2 Exakter Bitverlust eines einzelnen Abstiegs

Sei N ein nichtterminaler positiver Wert und $m = t(N)$. Wegen

$$m(m-1) \le N < m(m+1)$$

kann N in der Form

$$N = m^2 + d$$

mit

$$-m \le d \le m-1$$

geschrieben werden. Für den Triatrad-Nachfolger gilt dann

$$F(N) = N - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2} + d.$$

Aus dieser Darstellung folgt zunächst

$$F(N) < \frac{N}{2}.$$

Damit besitzt $F(N)$ stets mindestens ein Bit weniger als N.
Für die untere Schranke ergibt sich

$$F(N) - \frac{N}{4} = \frac{m^2 - 2m + 3d}{4}.$$

Da $d \ge -m$, folgt

$$F(N) - \frac{N}{4} \geq \frac{m(m-5)}{4}.$$

Für $m \geq 5$ gilt damit

$$\frac{N}{4} \leq F(N) < \frac{N}{2}.$$

Die verbleibenden kleinen Gruppen können unmittelbar vollständig geprüft werden. Für jeden nichtterminalen positiven Triatrad-Schritt folgt daher global

$$\boxed{1 \leq \mathrm{bitlen}(N) - \mathrm{bitlen}(F(N)) \leq 2.}$$

Der Bitlängenverlust eines einzelnen Schrittes kann somit ausschließlich die Werte

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{bit}} \in \{1,2\}}$$

annehmen. Dreifache oder größere Bitlängensprünge sind im Triatrad-Abstieg ausgeschlossen.

1.3 Beschränkung der Zweibit-Sprünge

Ein Zweibit-Sprung kann nur auftreten, wenn der aktuelle Wert hinreichend nahe an der unteren Zweierpotenzgrenze seines Bitintervalls liegt. Sei

$$b = \mathrm{bitlen}(N)$$

und

$$x = \frac{N}{2^{b-1}}, \qquad 1 \leq x < 2.$$

Mit der Darstellung

$$N = m^2 + d, \qquad -m \leq d \leq m - 1,$$

gilt für den Triatrad-Nachfolger

$$F(N) = \frac{m(m-1)}{2} + d.$$

Gleichzeitig kann dieser Ausdruck in der Form

$$F(N) = \frac{N}{2} - \varepsilon$$

geschrieben werden, wobei

$$\varepsilon = \frac{m-d}{2}.$$

Aus den Schranken für d folgt

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq m.$$

Da $m = t(N) < \sqrt{N} + 1$ und $N < 2^b$ gilt,

$$\varepsilon < 2^{b/2} + 1.$$

Für einen Einbit-Schritt von der Bitlänge b zur Bitlänge $b-1$ sei der normierte Folgewert

$$x' = \frac{F(N)}{2^{b-2}}.$$

Dann gilt

$$x' = x - \delta_b$$

mit

$$\delta_b = \frac{\varepsilon}{2^{b-2}}.$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$0 < \delta_b < D_b,$$

wobei

$$D_b = 2^{2-b/2} + 2^{2-b}.$$

Ein Zweibit-Sprung von b auf $b-2$ tritt genau dann auf, wenn

$$F(N) < 2^{b-2}.$$

Aus

$$F(N) = \frac{N}{2} - \varepsilon$$

folgt hierfür die notwendige Bedingung

$$x < 1 + \delta_b < 1 + D_b.$$

Ein Zweibit-Sprung ist somit nur möglich, wenn der normierte Wert x nahe am unteren Rand $x = 1$ seines Bitintervalls liegt.
Nach einem Zweibit-Sprung verändert sich diese Lage grundlegend. Sei B die Bitlänge des Ausgangswertes eines solchen Sprungs. Der Folgewert besitzt dann die Bitlänge $B-2$. Seine auf dieses neue Bitintervall bezogene Normierung erfüllt

$$x_{B-2} = \frac{F(N)}{2^{B-3}} = 2x_B - 2\delta_B.$$

Wegen $x_B \geq 1$ und $\delta_B < D_B$ folgt

$$x_{B-2} > 2 - 2D_B.$$

Der Folgewert liegt damit wieder im oberen Bereich seines neuen Bitintervalls.
Angenommen, auf demselben Abstiegsweg träte später ein weiterer Zweibit-Sprung mit einer Ausgangsbitlänge $k \geq 8$ auf. Zwischen dem ersten Zweibit-Sprung bei Bitlänge B und diesem zweiten Zweibit-Sprung bestehen ausschließlich Einbit-Schritte. Für den normierten Wert bei Bitlänge k folgt daher

$$x_k > 2 - 2D_B - \sum_{j=k+1}^{B-2} D_j.$$

Für $B \geq k + 2$ gilt

$$2D_B + \sum_{j=k+1}^{B-2} D_j < \sum_{j=k+1}^{\infty} D_j.$$

Dies folgt aus $D_{B-1} > D_B > 0$ und der Positivität aller weiteren Summanden.
Definiert man

$$S_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} D_j,$$

so ergibt sich wegen $k \geq 8$

$$S_k \leq S_8.$$

Für S_8 erhält man explizit

$$S_8 = \sum_{j=9}^{\infty} \left(2^{2-j/2} + 2^{2-j}\right) = \frac{17 + 16\sqrt{2}}{64} \approx 0{,}619178.$$

Damit muss für einen möglichen zweiten Zweibit-Sprung mit Ausgangsbitlänge $k \geq 8$ gelten

$$x_k > 2 - S_8 \approx 1{,}380822.$$

Andererseits verlangt ein Zweibit-Sprung bei $k \geq 8$

$$x_k < 1 + D_k \leq 1 + D_8.$$

Wegen

$$D_8 = \frac{17}{64} = 0{,}265625$$

folgt

$$x_k < 1{,}265625.$$

Die beiden Bedingungen

$$x_k > 1{,}380822$$

und

$$x_k < 1{,}265625$$

sind unvereinbar. Damit kann auf einem vollständigen Abstiegsweg höchstens ein Zweibit-Sprung auftreten, dessen Ausgangswert eine Bitlänge von mindestens 8 besitzt.

Für den verbleibenden endlichen Bereich

$$1 \leq N < 128$$

können sämtliche Werte vollständig geprüft werden. Die maximalen Zahlen von Zweibit-Sprüngen innerhalb dieses unteren Bereichs lauten:

Terminalwert E(N)	maximale Zahl der Zweibit-Sprünge	Beispiel
1	2	$17 \rightarrow 7 \rightarrow 1$
2	2	$33 \rightarrow 12 \rightarrow 2$
3	2	$34 \rightarrow 13 \rightarrow 3$
6	1	$16 \rightarrow 6$

Tabelle 1

Oberhalb dieses Bereichs kann höchstens ein weiterer Zweibit-Sprung auftreten. Damit folgt für einen vollständigen Abstiegsweg

$$J(N) \leq 3.$$

Für Wege mit Terminalwert 6 gilt sogar

$$J(N) \leq 2.$$

Die globale Schranke $J(N) \leq 3$ ist scharf. Der Abstiegsweg

$$136 \rightarrow 58 \rightarrow 22 \rightarrow 7 \rightarrow 1$$

besitzt die Bitlängenfolge

$$8 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

und damit die Bitverluste

$$2,\ 1,\ 2,\ 2.$$

Es treten somit tatsächlich drei Zweibit-Sprünge auf. Der erste besitzt die Ausgangsbitlänge 8, die beiden weiteren liegen im endlichen unteren Bereich.

1.4 Pfadlänge und Bitlänge

Sei

$$N_0 = N,\ N_1, \ldots, N_{P(N)-1} = E(N)$$

ein vollständiger Abstiegsweg eines nichtterminalen Startwertes N, wobei $P(N)$ die Anzahl der Positionen einschließlich Startwert und Terminalwert bezeichnet. Der Weg besitzt somit

$$P(N) - 1$$

Operatoranwendungen.
Jeder Übergang verringert die Bitlänge entweder um ein oder um zwei Bit. Sei $J(N)$ die Anzahl der Zweibit-Sprünge. Dann besitzen $P(N) - 1 - J(N)$ Übergänge einen Bitverlust von eins und $J(N)$ Übergänge einen Bitverlust von zwei. Der gesamte Bitlängenverlust ist daher

$$\begin{aligned} b - \mathrm{bitlen}(E(N)) &= (P(N) - 1 - J(N)) + 2J(N) \\ &= P(N) - 1 + J(N). \end{aligned}$$

Damit gilt die exakte Identität

$$P(N) = b - \mathrm{bitlen}(E(N)) + 1 - J(N).$$

Äquivalent folgt

$$b - P(N) = \mathrm{bitlen}(E(N)) - 1 + J(N).$$

Die vier Terminalwerte besitzen die Bitlängen

$$\mathrm{bitlen}(1) = 1,$$

$$\mathrm{bitlen}(2) = \mathrm{bitlen}(3) = 2,$$

und

$$\mathrm{bitlen}(6) = 3.$$

Für Wege mit Terminalwert 1 gilt bei jedem nichtterminalen Startwert zusätzlich

$$J(N) \geq 1.$$

Die Gleichung $F(N) = 1$ besitzt als unmittelbare nichtterminale Vorgänger nur 4 und 7. Beide letzten Übergänge,

$$4 \to 1$$

und

$$7 \to 1,$$

verringern die Bitlänge um zwei. Zusammen mit $J(N) \leq 3$ folgt für diese Klasse

$$1 \leq b - P(N) \leq 3.$$

Für die Terminalwerte 2 und 3 gilt wegen ihrer Bitlänge zwei und der globalen Schranke $J(N) \leq 3$

$$1 \leq b - P(N) \leq 4.$$

Für den Terminalwert 6 gilt nach der terminalwertspezifischen Schranke $J(N) \leq 2$

$$2 \leq b - P(N) \leq 4.$$

Damit ergibt sich für jeden nichtterminalen positiven Startwert unabhängig von seiner Terminalklasse die globale Schranke

$$1 \leq b - P(N) \leq 4.$$

Äquivalent gilt

$$b - 4 \leq P(N) \leq b - 1.$$

Die Pfadlänge eines vollständigen Triatrad-Abstiegs unterscheidet sich somit unabhängig von der Größe des Startwertes um höchstens vier Positionen von dessen Bitlänge. Insbesondere folgt

$$P(N) = b + O(1).$$

Diese Aussage ist stärker als eine lediglich lineare asymptotische Schranke. Der vollständige Abstiegsweg besitzt nicht nur die Größenordnung der Bitlänge, sondern weicht von ihr um eine global beschränkte additive Konstante ab.

1.5 Zweibit-Sprünge bei beliebig großen Ausgangswerten

Die starke Konzentration der empirisch beobachteten Zweibit-Sprünge auf kleine Bitlängen bedeutet nicht, dass solche Sprünge nur in einem beschränkten Zahlenbereich auftreten können. Es existiert vielmehr eine unendliche Familie beliebig großer Ausgangswerte, bei denen unmittelbar ein Zweibit-Sprung erfolgt.
Sei für $a \geq 1$

$$N_a = 2^{2a}.$$

Da N_a ein Quadrat ist, gilt

$$t(N_a) = 2^a.$$

Der Triatrad-Nachfolger lautet daher

$$\begin{aligned} F(N_a) &= 2^{2a} - \frac{2^a(2^a+1)}{2} \\ &= 2^{2a-1} - 2^{a-1} \\ &= 2^{a-1}(2^a - 1). \end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ gilt

$$2^{2a-2} \leq F(N_a) < 2^{2a-1}.$$

Damit besitzt der Ausgangswert die Bitlänge

$$\mathrm{bitlen}(N_a) = 2a + 1,$$

während für den Folgewert

$$\mathrm{bitlen}(F(N_a)) = 2a - 1$$

gilt. Folglich ist

$$\mathrm{bitlen}(N_a) - \mathrm{bitlen}(F(N_a)) = 2.$$

Jeder Wert der unendlichen Familie

$$N_a = 2^{2a}$$

erzeugt somit einen Zweibit-Sprung. Da a beliebig groß gewählt werden kann, treten Zweibit-Sprünge bei beliebig großen Ausgangswerten auf.
Die globale Beschränkung betrifft daher nicht die Größe möglicher Zweibit-Sprünge im Zahlenraum, sondern ihre Anzahl entlang eines einzelnen vollständigen Abstiegsweges.

2 KQ-Struktur und Trichtergeometrie

2.1 Verwendete KQ-Metadaten

Für die folgende strukturelle Betrachtung wird nur ein kleiner Teil der bereits eingeführten KQ-Metadaten benötigt. Die vollständige Konstruktion von KQ und KFS ist Gegenstand der vorausgehenden Arbeit zu den KQ/KFS-Strukturen[2] und wird hier nicht erneut gezeigt.

Für einen Wert N sei $t_q = t_q(N)$ die eindeutige KQ-Gruppennummer mit

$$t_q(t_q - 1) \leq N < t_q(t_q + 1).$$

Mit

$$t_p = t_q - 1$$

ist die Gruppenidentität

$$N_0 = t_q(t_q - 1).$$

Die Position von N innerhalb seiner Gruppe ist

$$GP = N - N_0.$$

Damit kann jeder Wert unmittelbar in der Form

$$\boxed{N = t_q(t_q - 1) + GP}$$

geschrieben werden.

Für $GP = 0$ liegt die Gruppenidentität N_0 vor. Die echten Gruppenmitglieder besitzen die Positionen

$$GP = 1, \dots, 2t_q - 1.$$

Das Quadratzentrum GZ liegt bei

$$GP = t_q$$

und damit bei

$$N = t_q^2.$$

[2] Meißner, A. (2025). KQ-KFS-Strukturen: Zur geometrischen Emergenz arithmetischer Realität. Eine Analyse Kanonisch-Quasiquadratischer Gruppen (KQ) und K-Fokaler-Schalenstrukturen (KFS) als Strukturformen informationstragender Räume. Zenodo. https://doi.org/10.5281/ZENODO.15683651

Für $1 \leq GP < t_q$ liegt N auf der linken Gruppenseite NL, für $t_q < GP \leq 2t_q - 1$ auf der rechten Gruppenseite NR. Die Anzahl der echten Gruppenmitglieder beträgt somit

$$2t_q - 1,$$

woraus die Folge der Gruppenbreiten

$$1,3,5,7,9, \ldots$$

entsteht.

Die Abbildung 1 zeigt diese Struktur für $N = 1$ bis $N = 31$. Grün markiert sind die Gruppenidentitäten N_0 und rot die Quadratzentren GZ.

N	Tp	Tq	GP	N0	SP	Lage
1	0	1	1	0	0	-
2	1	2	0	2	N0	N0
3	1	2	1	2	-1	NL
4	1	2	2	2	0	GZ
5	1	2	3	2	1	NR
6	2	3	0	6	N0	N0
7	2	3	1	6	-2	NL
8	2	3	2	6	-1	NL
9	2	3	3	6	0	GZ
10	2	3	4	6	1	NR
11	2	3	5	6	2	NR
12	3	4	0	12	N0	N0
13	3	4	1	12	-3	NL
14	3	4	2	12	-2	NL
15	3	4	3	12	-1	NL
16	3	4	4	12	0	GZ
17	3	4	5	12	1	NR
18	3	4	6	12	2	NR
19	3	4	7	12	3	NR
20	4	5	0	20	N0	N0
21	4	5	1	20	-4	NL
22	4	5	2	20	-3	NL
23	4	5	3	20	-2	NL
24	4	5	4	20	-1	NL
25	4	5	5	20	0	GZ
26	4	5	6	20	1	NR
27	4	5	7	20	2	NR
28	4	5	8	20	3	NR
29	4	5	9	20	4	NR
30	5	6	0	30	N0	N0
31	5	6	1	30	-5	NL

Abbildung 1: KQ-Gruppe N = 1 bis N = 31

2.2 Die Verjüngung der KQ-Gruppen

Wird die KQ-Struktur mit abnehmender Gruppennummer betrachtet, verringert sich die Zahl der echten Gruppenmitglieder bei jedem Übergang um zwei:

$$2t_q - 1 \rightarrow 2t_q - 3.$$

Die Quadratzentren

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$

bilden dabei die jeweilige Gruppenmitte. Die KQ-Gruppen besitzen damit eine natürliche Trichtergeometrie: Mit sinkender Gruppennummer verschwindet auf jeder Seite jeweils eine Position, während das Quadratzentrum als eindeutige Mittelposition erhalten bleibt.

Besonders deutlich wird diese Verjüngung beim elementaren KQ-Abstieg

$$K(N) = N - t_q(N).$$

Für die erste linke Position einer Gruppe gilt

$$N_{GP1} = t_q(t_q - 1) + 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} K(N_{GP1}) &= t_q(t_q - 1) + 1 - t_q \\ &= (t_q - 1)^2. \end{aligned}$$

Der Wert $(t_q - 1)^2$ ist genau das Quadratzentrum der nächstkleineren KQ-Gruppe. Somit gilt allgemein

$$\boxed{GP1_{t_q} \to GZ_{t_q - 1}.}$$

Beispiele sind

$$7 \to 4,$$

$$13 \to 9,$$

$$21 \to 16.$$

Diese Abbildung ist eine direkte Folge der um zwei abnehmenden Gruppenbreite. Die äußerste linke Position $GP1$ rastet beim Verengen der KQ-Struktur genau auf dem Zentrum der kleineren Gruppe ein.

Die rechte Gruppenseite besitzt dagegen keinen entsprechenden Randkollaps. Schreibt man eine NR-Position als

$$GP = t_q + s, \qquad 1 \le s \le t_q - 1,$$

so ergibt sich

$$K(N) = t_q(t_q - 1) + s.$$

Der Wert liegt damit auf der linken Seite derselben KQ-Gruppe. Die rechte Seite wird durch den $N - t_q$-Abstieg zunächst auf die linke Seite zurückgeführt, während die linke Randposition $GP1$ beim weiteren Verengen exakt auf ein Quadratzentrum trifft. Die Trichterwirkung ist daher strukturell nicht beidseitig identisch.

3 Verbindung zwischen KQ und Triatrad

3.1 Dreieckszahlen als halbierte Rechteckstruktur

Der Triatrad-Operator verwendet die Dreieckszahl

$$T_{t_q} = \frac{t_q(t_q + 1)}{2}.$$

Die Gruppenidentität der folgenden KQ-Gruppe ist

$$N_0(t_q + 1) = t_q(t_q + 1).$$

Damit gilt unmittelbar

$$\boxed{T_{t_q} = \frac{N_0(t_q + 1)}{2}.}$$

Die im Triatrad subtrahierte Dreieckszahl ist somit exakt die Hälfte einer Rechteckzahl, die zugleich eine KQ-Gruppengrenze definiert. Der Dreieckszahlenabstieg und die KQ-Gruppenstruktur beruhen damit auf demselben Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

Für die folgende Herleitung ist jedoch keine geometrische Interpretation dieser Identität erforderlich. Entscheidend ist, dass sich der Triatrad-Operator vollständig in den KQ-Koordinaten t_q und GP ausdrücken lässt.

3.2 Der Triatrad-Operator in KQ-Koordinaten

Mit

$$N = t_q(t_q - 1) + GP$$

folgt

$$\begin{aligned} F(N) &= N - T_{t_q} \\ &= t_q(t_q - 1) + GP - \frac{t_q(t_q + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{F(N) = \frac{t_q(t_q - 3)}{2} + GP.}$$

Äquivalent kann geschrieben werden

$$\boxed{F(N) = T_{t_q - 2} - 1 + GP.}$$

Innerhalb einer festen KQ-Gruppe wirkt der Triatrad damit als einfache Translation der Gruppenposition GP. Die Reihenfolge der KQ-Positionen bleibt erhalten. Insbesondere gilt für die ausgezeichnete Randposition $GP1$

$$F(GP1_{t_q}) = T_{t_q-2}.$$

Für das Quadratzentrum der nächstkleineren Gruppe gilt ebenfalls

$$F(GZ_{t_q-1}) = T_{t_q-2}.$$

Damit erhält man die Identität

$$\boxed{F(GP1_{t_q}) = F(GZ_{t_q-1}).}$$

Die durch den KQ-Trichter miteinander verbundenen Positionen $GP1_{t_q}$ und GZ_{t_q-1} werden vom Triatrad also auf denselben Folgewert abgebildet. Für die ersten drei Fälle ergibt sich

$$F(7) = F(4) = 1,$$

$$F(13) = F(9) = 3,$$

$$F(21) = F(16) = 6.$$

Die im KQ-Abstieg sichtbare Trichterstruktur und die Triatrad-Dynamik sind damit algebraisch unmittelbar miteinander verzahnt.

3.3 Die vier Terminalwerte am Boden des KQ-Trichters

Ein positiver Wert ist terminal, wenn der nächste Triatrad-Schritt nicht mehr positiv ist:

$$F(N) \leq 0.$$

Mit der KQ-Darstellung folgt die Bedingung

$$\frac{t_q(t_q - 3)}{2} + GP \leq 0.$$

Für $t_q = 1$ liefert dies den einzigen positiven Wert

$$N = 1.$$

Für $t_q = 2$ sind genau die Positionen $GP = 0$ und $GP = 1$ möglich. Sie entsprechen

$$N = 2, \qquad N = 3.$$

Für $t_q = 3$ bleibt ausschließlich $GP = 0$, also

$$N = 6.$$

Ab $t_q = 4$ gilt bereits

$$\frac{t_q(t_q-3)}{2} > 0.$$

Da zusätzlich $GP \geq 0$ ist, folgt für jede KQ-Gruppe mit $t_q \geq 4$

$$F(N) > 0.$$

Somit kann außerhalb der drei untersten KQ-Gruppen kein weiterer Terminalwert auftreten. Die vollständige Terminalmenge ist daher

$$\boxed{\{1,2,3,6\}.}$$

In KQ-Koordinaten erscheinen diese vier Werte als

N	t_q	GP
1	1	1
2	2	0
3	2	1
6	3	0

Die Vierterminalität ist damit nicht auf eine empirische Suche nach kleinen Endwerten angewiesen. Die KQ-Trichtergeometrie beschränkt mögliche Terminalpositionen von vornherein auf ihren unteren Bereich, während die KQ-Form des Triatrad-Operators ab $t_q = 4$ jeden weiteren terminalen Zustand ausschließt.

Da jeder nichtterminale Triatrad-Schritt einen kleineren positiven Wert erzeugt, erreicht jeder Abstiegsweg nach endlich vielen Schritten einen dieser vier Werte. Die vier Terminalwerte erzeugen folglich die vier disjunkten Rückwärtsbäume

$$\boxed{\mathbb{N}_{>0} = \mathcal{C}_1 \dot{\cup} \mathcal{C}_2 \dot{\cup} \mathcal{C}_3 \dot{\cup} \mathcal{C}_6.}$$

4 Inverse Verzweigung und Informationsstruktur

4.1 Zwei reguläre Vorgänger

Neben dem vorwärts gerichteten Bitverlust besitzt auch die inverse Triatrad-Struktur eine auffällige binäre Eigenschaft. Sei X ein positiver Zielwert und N ein unmittelbarer Vorgänger mit

$$F(N) = X.$$

Für einen möglichen Gruppenindex $m = t(N)$ gilt

$$N = X + T_m.$$

Damit N tatsächlich zur KQ-Gruppe m gehört, muss

$$m(m-1) \leq X + T_m < m(m+1)$$

gelten. Nach Einsetzen von $T_m = m(m+1)/2$ ergibt sich die äquivalente Bedingung

$$\frac{m(m-3)}{2} \leq X < T_m.$$

Sei nun r eindeutig durch

$$T_{r-1} \leq X < T_r$$

bestimmt. Dann erfüllen die beiden Indizes

$$m = r$$

und

$$m = r + 1$$

stets die Vorgängerbedingung. Somit besitzt jeder positive Triatrad-Knoten mindestens zwei unmittelbare Vorgänger.
Ein dritter Vorgänger mit

$$m = r + 2$$

ist genau dann möglich, wenn

$$X = T_r - 1.$$

Damit gilt

$$\boxed{\#F^{-1}(X) = \begin{cases} 3, & X = T_r - 1 \text{ für ein } r, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Die reguläre inverse Triatrad-Struktur ist folglich binär. Nur an den unmittelbar unterhalb einer Dreieckszahl liegenden Knoten tritt eine dritte Verzweigung auf.

4.2 Seltenheit der Dreifachverzweigungen

Die Ausnahmezustände besitzen die Form

$$X = T_r - 1.$$

Bis zu einer Schranke M gibt es daher nur ungefähr so viele Dreifachverzweigungen, wie Dreieckszahlen unterhalb von M liegen. Ihre Anzahl wächst somit lediglich in der Größenordnung

$$O(\sqrt{M}).$$

Relativ zu den M untersuchten positiven ganzen Zahlen beträgt ihr Anteil daher

$$O(M^{-1/2})$$

und verschwindet für

$$M \to \infty.$$

Die inverse Triatrad-Struktur ist damit asymptotisch fast überall eine Zweifachverzweigung.

4.3 KQ-Interpretation der Rückwärtsmehrdeutigkeit

Die KQ-Darstellung des Triatrad-Operators lautet

$$F(N) = T_{t_q - 2} - 1 + GP.$$

Ist die Ursprungsgruppe t_q bekannt, so kann die Gruppenposition aus einem Zielwert $X = F(N)$ unmittelbar rekonstruiert werden:

$$GP = X - T_{t_q - 2} + 1.$$

Anschließend folgt der ursprüngliche Wert eindeutig aus

$$N = t_q(t_q - 1) + GP.$$

Innerhalb einer festen KQ-Gruppe geht beim Triatrad-Schritt somit keine Mehrdeutigkeit der Gruppenposition verloren. Die inverse Mehrdeutigkeit entsteht dadurch, dass derselbe Zielwert regulär aus zwei verschiedenen zulässigen KQ-Gruppen stammen kann.

Für einen regulären Zielwert besteht die Rückwärtsentscheidung daher aus der Auswahl zwischen genau zwei Ursprungsgruppen. Diese Auswahl kann durch eine einzige binäre Entscheidung codiert werden:

$$\log_2 2 = 1.$$

An den seltenen Dreifachverzweigungen reicht eine einzelne binäre Auswahl dagegen nicht aus.

Diese Aussage ist von einem Shannon-Informationsverlust des Vorwärtsschrittes zu unterscheiden. Die Bitlänge eines ganzzahligen Wertes ist keine Shannon-Entropie. Die strukturelle Übereinstimmung besteht darin, dass der Vorwärtsweg fast überall genau eine binäre Größenstufe verliert, während der Rückwärtsweg fast überall genau eine binäre Auswahl zwischen zwei möglichen Ursprungsgruppen benötigt.

Damit stehen zwei Eigenschaften desselben Operators einander gegenüber:

vorwärts: regulär ein Bit Bitlängenverlust

und

rückwärts: regulär zwei mögliche Vorgänger.

Die KQ-Koordinaten präzisieren diese zweite Aussage: Nach Festlegung der Ursprungsgruppe ist der Vorgänger vollständig bestimmt.

5 Schlussbetrachtung

Die Untersuchung zeigt, dass die Bitlängendynamik des kanonischen Triatrads wesentlich starrer ist, als eine bloße asymptotische Halbierung vermuten lässt. Für jeden nichtterminalen Schritt gilt exakt

$$\mathrm{bitlen}(N) - \mathrm{bitlen}(F(N)) \in \{1,2\}.$$

Ein Verlust von drei oder mehr Bit in einem einzelnen Schritt ist ausgeschlossen. Zweibit-Sprünge sind zwar auch bei beliebig großen Zahlen möglich, ihre Zahl auf einem vollständigen Abstiegsweg ist jedoch global beschränkt:

$$J(N) \leq 3.$$

Für die Anzahl $P(N)$ der Positionen eines vollständigen Abstiegsweges folgt daraus die exakte Identität

$$P(N) = b - \mathrm{bitlen}(E(N)) + 1 - J(N)$$

und damit die globale Schranke

$$\boxed{b - 4 \leq P(N) \leq b - 1.}$$

Die Pfadlänge unterscheidet sich folglich unabhängig von der Größe des Startwertes nur um eine beschränkte additive Konstante von dessen Bitlänge:

$$\boxed{P(N) = b + O(1).}$$

Die KQ-Darstellung liefert hierzu eine ergänzende strukturelle Sicht. Mit

$$N = t_q(t_q - 1) + GP$$

nimmt der Triatrad-Operator die Form

$$\boxed{F(N) = \frac{t_q(t_q - 3)}{2} + GP}$$

an. Damit ist der Operator innerhalb jeder KQ-Gruppe eine positionsbewahrende Translation. Zugleich erklärt die Verjüngung der KQ-Gruppen die ausgezeichnete Beziehung

$$GP1_{t_q} \rightarrow GZ_{t_q - 1},$$

wobei beide Positionen vom Triatrad anschließend auf denselben Folgewert abgebildet werden.

Am unteren Ende der KQ-Struktur liefert die Bedingung $F(N) \leq 0$ ausschließlich die vier positiven Werte

$$\boxed{1,\ 2,\ 3,\ 6.}$$

Für $t_q \geq 4$ ist ein weiterer terminaler Zustand bereits aufgrund der KQ-Form des Operators ausgeschlossen. Die bekannte Vierbaumzerlegung des Triatrads erscheint damit zugleich als arithmetische und als strukturelle Eigenschaft derselben Rechteckzahlengeometrie.

Auch die inverse Dynamik zeigt eine binäre Grundstruktur. Jeder Knoten besitzt regulär genau zwei unmittelbare Vorgänger; nur die Werte unmittelbar unterhalb einer Dreieckszahl besitzen drei. Die reguläre Rückwärtsentscheidung entspricht damit einer Auswahl zwischen zwei möglichen Ursprungsgruppen, während die Gruppenposition innerhalb einer gewählten KQ-Gruppe eindeutig rekonstruierbar bleibt.

Der kanonische Triatrad verbindet somit drei eng gekoppelte Strukturen: einen bis auf global beschränkte Ausnahmen exakten Einbit-Abstieg, eine vierteilige terminale KQ-Trichtergeometrie und eine nahezu überall binäre inverse Verzweigung.