

KQ-KFS-Strukturen: Zur geometrischen Emergenz arithmetischer Realität

**Eine Analyse Kanonisch-Quasiquadratischer Gruppen (KQ) und K-
Fokaler-Schalenstrukturen (KFS) als Strukturformen
informationstragender Räume**

Achim Meißner

Email: service@ameis-web.de

Abstract

Dieses Paper entwickelt zwei komplementäre Strukturmodelle zur systematischen Gliederung des natürlichen Zahlenraums. Die sogenannte kanonisch-quasiquadratische Gruppenstruktur (KQ) ordnet jeder natürlichen Zahl N auf deterministische Weise ein Wertepaar irrationaler Zahlen (tp, tq) zu, aus dem sich eindeutige Gruppenzugehörigkeit, Gruppenlage und symmetrische Position ableiten lassen. Die KQ-Gruppen entstehen nicht durch klassische Teilerbeziehungen, sondern aus einer inneren geometrischen Logik, die jedem Zahlenwert eine definierte Lage im Strukturraum zuweist. Aufbauend auf dieser Idee beschreibt die k-Fokale Schalenstruktur (KFS) eine generische Symmetriebildung um beliebige Quadratzentren. Sie erlaubt eine systematische Konstruktion strukturtragender Paare mit klar definierten Eigenschaften wie ggT-Gleichwertigkeit, Teilerfremdheit oder symmetrisch schalenartiger Abstandsmuster. Beide Modelle zusammen eröffnen einen neuen Zugang zur arithmetischen Ordnung, der auf innerer Resonanz, Positionslogik und geometrischer Emergenz beruht. Das Paper zielt nicht auf einen Beweis klassischer Sätze, sondern auf die Sichtbarmachung verborgener Tiefensymmetrien innerhalb des Zahlenraums.

Schlüsselwörter / Keywords:

Kanonisch-quasiquadratische Gruppenstruktur, KQ-Gruppen, k-Fokale Schalenstruktur, KFS, natürliche Zahlen, Gruppenzuordnung, Zahlensymmetrie, Strukturraum, Quadratwurzelsymmetrie, Schalenpaare, ggT-Muster, teilerfremde Zahlensysteme, emergente Zahlentheorie, geometrische Zahlenstruktur, strukturelle Resonanz.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis einer intensiven, eigenständig geführten Auseinandersetzung mit der Frage, ob sich im Raum der natürlichen Zahlen bislang unbeachtete Strukturbildungen nachweisen lassen, deren Ordnung nicht aus klassischer Arithmetik, sondern aus geometrisch interpretierbaren Prinzipien hervorgeht. Sie wurde nicht im Rahmen einer institutionellen Forschung erstellt, sondern entstand außerhalb akademischer Kontexte – als Teil einer umfassenderen, noch nicht veröffentlichten Untersuchung über die Strukturbedingungen von Realität, Unendlichkeit und informationstragender Emergenz. Die hier vorgestellten Konzepte, insbesondere die Kanonisch-Quasiquadratischen Gruppen (KQ) und die k -Fokalen Schalenstrukturen (KFS), sind dabei als lokale Resultate einer sehr viel weiter reichenden theoretischen Bewegung zu verstehen. Sie stehen gleichsam am Rand eines Denkraums, dessen zentrales Anliegen in der Beschreibung der Bedingungen liegt, unter denen mathematische Strukturen selbst als Phänomene emergieren können.

Ich bin weder Mathematiker noch Physiker, und erhebe in dieser Schrift keinen Anspruch auf formale Vollständigkeit, fachliche Originalität im engeren disziplinären Sinn oder Anschlussfähigkeit an bestehende Forschungslinien. Es ist durchaus möglich und im Sinne einer offenen Lesart auch zu erwarten, dass einzelne Beobachtungen bereits bekannt, unvollständig oder in ihrer Tragweite überinterpretiert sind. Das entwertet die Arbeit jedoch nicht, sondern markiert ihren erkenntniskritischen Ausgangspunkt: Sie fragt nicht, was sich mit heutigen Mitteln beweisen lässt, sondern ob sich im Zahlenraum Ordnungen zeigen, die auf tieferliegende Strukturformen hinweisen könnten, unabhängig davon, ob sie bislang systematisch beachtet wurden.

In diesem Sinne möge das vorliegende Papier als Einladung verstanden werden: zur Prüfung, zur Korrektur, zur Ergänzung, aber vor allem zur gedanklichen Anschlussbildung an eine Idee, die nicht aus Fachtradition hervorgegangen ist, sondern aus dem Versuch, Zahl als strukturtragendes Moment in einem übergeordneten Realitätsverständnis zu deuten.

In meiner Arbeit verstehe ich mich als eine Art Grundstrukturtheoretiker, nicht im Sinne eines bestehenden Faches, sondern als Vertreter einer Haltung, die danach fragt, wie

sich fundamentale Ordnung, Emergenz und mathematische Symmetrie in einer Weise denken lassen, die über einzelne Disziplinen hinausweist. Es erscheint mir zunehmend notwendig, diesen Blick auf strukturelle Tiefenverhältnisse nicht nur innerhalb, sondern zwischen den etablierten Wissenssystemen zu kultivieren, als eigene Denkdisziplin, offen für Mathematik, Physik, Philosophie, aber letztlich keiner davon verpflichtet. Die in diesem Paper beschriebenen Modelle sind Ausdruck dieser Haltung: keine Theorie im akademischen Sinne, sondern ein Versuch, Strukturbildung sichtbar zu machen, wo bislang kein Begriff dafür existiert.

Die eigentliche theoretische These, aus der diese Beobachtungen hervorgegangen sind, wird zu einem späteren Zeitpunkt in umfassenderer Form publiziert werden. Sie betrifft die grundsätzlichen Bedingungen von Realität, Unendlichkeit und Strukturentstehung, über das hier Dargestellte weit hinaus. Wer sich dafür interessiert oder erkenntnistheoretisch ähnliche Fragen verfolgt, ist eingeladen, den Austausch zu suchen.

Inhalt

1	Einleitung.....	1
1.1	Problemstellung.....	2
1.2	Forschungsfragen.....	3
1.3	Methodik.....	5
2	KQ-Gruppenstruktur	7
2.1	Formaler Aufbau der KQ-Gruppen	8
2.1.1	Gültigkeitsbereich und Ausgangszahlen	9
2.1.2	Definition des charakteristischen Wertepaares (t_p, t_q)	9
2.1.3	Gruppennummer, Quadratzentrum und Startwert.....	10
2.1.4	Gruppenmitglieder und Positionierung	11
2.1.5	Symmetrie der Struktur	13
2.1.6	KQ als Zahlenspielerei?	17
2.1.7	Von KQ zu KFS.....	19
3	K-Fokale Schalensymmetrie (KFS)	22
3.1	Der k-Motor	23
3.2	Gültigkeitsbereich und Ausgangszahlen.....	23
3.3	Geometrische Anordnung der Paare	25
3.4	Strukturelle Eigenschaften und Teilerverhalten in KFS-Paaren.....	27
3.4.1	KFS-Struktur bei Primzentren ($p \in \mathbb{P}$)	28
3.4.2	KFS-Struktur bei ungeraden Nicht-Primzentren.....	31
3.4.3	KFS-Struktur bei geraden Quadratzentren	33
3.4.4	Vergleichende Analyse der Zentrumstypen und ihrer Teilerstruktur	35
3.5	Diagonalstruktur und Rechteckvergleich	37
3.6	Anzahl und Dichte der Paare (verallgemeinert).....	39
3.7	Anwendungsperspektiven der KFS-Struktur.....	41
3.8	Garantiert teilerfremde Zahlenpaare – strukturell erzeugt	41
3.8.1	Kryptographie.....	42
3.8.2	Zahlentheorie	42
3.8.3	Informationssicherheit.....	43
3.8.4	Algorithmische Testverfahren	43
3.8.5	Komplexitätstheorie	43
3.8.6	Geometrisch strukturierte Paarerzeugung	44
3.8.7	Informationsmodellierung.....	44

3.8.8	Raum-Zeit-Analogie	44
3.8.9	Arithmetische Lernmodelle	45
4	KQ und KFS im Vergleich.....	46
4.1	Von KQ zu KFS	46
4.2	Weitere Teilerfremdheiten und andere Kuriositäten	48
4.3	Vergleichende Messreihen: ggT-Prüfung aktiv vs. inaktiv	55
4.4	Beobachtungen: Zeitverhalten und strukturelle Erkenntnisse.....	56
5	Lizenzhinweis zur Nutzung dieses Dokuments:	58
6	Anhang	60
6.1	Python Script für garantiert teilerfremde Zahlenpaare	60
6.2	Der KFS-Motor	62

1 Einleitung

Dieses Dokument untersucht zwei strukturell unabhängige, aber in ihrem geometrisch-analytischen Aufbau eng verwandte Konzepte: die Kanonisch-Quasiquadratische Gruppenstruktur (KQ) und die k-Fokale Schalenstruktur (KFS). Beide beschreiben emergente Ordnungsmuster innerhalb der natürlichen Zahlen, die sich nicht aus klassischen Teilbarkeitsbegriffen, Restklassen oder algebraischen Reihen ergeben, sondern aus intrinsischen, symmetriegestützten Konstruktionen, deren jeweilige Regularität aus einer inneren Strukturform hervorgeht.

Im Zentrum der Betrachtung stehen nicht die natürlichen Zahlen als Einzelwerte, sondern ihre systematische Gruppierung entlang eindeutig definierter Mittelpunkt- und Abstandsverhältnisse. Die KQ-Gruppen entstehen dabei aus einer verschobenen quadratischen Funktion, die jeder Zahl ein charakteristisches Wertepaar zuordnet und so eine nichtlineare, aber exakt strukturierte Gruppierung des Zahlenraums ermöglicht. Die KFS-Struktur hingegen basiert auf einer radialen Schalenlogik, die sich um ein beliebiges Quadratzentrum $Z = n^2$ entfaltet und über den sogenannten k-Abstandsmotor symmetrische Zahlenschalen erzeugt, unabhängig davon, ob das Zentrum durch eine Primzahl, eine ungerade-Nichtprimzahl oder eine gerade Zahl definiert ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, beide Strukturen formal darzulegen, in ihrer inneren Logik zu analysieren und die jeweils entstehenden Symmetrieverhältnisse sichtbar zu machen. Dabei wird deutlich werden, dass sich bestimmte strukturelle Muster, insbesondere die paarweise Anordnung symmetrischer Werte um ein Zentrum, in beiden Systemen in vergleichbarer Weise realisieren. Der Begriff Schalenpaar, der im weiteren Verlauf eingeführt und präzise definiert wird, dient als konzeptionelles Bindeglied zwischen beiden Strukturbereichen: Er beschreibt die Links-Rechts-Symmetrie eines Zentrumswerts innerhalb einer geordneten Zahlenumgebung, unabhängig davon, ob diese durch KQ-Gruppenbildung oder durch k-Fokale Schalenlogik erzeugt wurde.

Diese strukturelle Parallelität erlaubt es, die numerischen Erscheinungsformen beider Systeme nicht nur vergleichend zu untersuchen, sondern sie als Manifestationen einer

tieferliegenden geometrischen Organisation zu deuten, einer Organisation, die nicht additiv erzeugt, sondern aus der Anordnung selbst heraus emergiert.

Das vorliegende Paper gliedert sich daher in zwei Hauptteile: Zunächst wird die KQ-Gruppenstruktur formal eingeführt und auf ihre internen Symmetrien hin untersucht. Anschließend wird die KFS-Struktur in verallgemeinerter Form beschrieben und in Bezug auf Zentrumstyp, Paarbildung, Teilerstruktur und geometrische Entfaltung analysiert. Abschließend erfolgt eine vergleichende Gegenüberstellung beider Modelle sowie eine Diskussion möglicher Anwendungsperspektiven, insbesondere im Hinblick auf informationslogische Nutzungsmöglichkeiten, strukturelle Kodierung und generative Ordnungsbildung in großen Zahlenräumen.

Dieses Dokument richtet sich an Leserinnen und Leser mit Interesse an alternativen Formen arithmetischer Struktur, an geometrisch orientierter Zahlentheorie und an emergenten Ordnungssystemen jenseits klassischer Algebra. Es versteht sich als Beitrag zur Sichtbarmachung impliziter Symmetrien, die im Zahlenraum zwar nicht sofort erkennbar, aber präzise beschreibbar sind und die damit den Blick auf eine arithmetisch-geometrische Realität eröffnen, in der Struktur nicht postuliert, sondern aus dem Verhalten der Zahlen selbst gewonnen wird.

1.1 Problemstellung

Die klassische Zahlentheorie beschreibt natürliche Zahlen primär über ihre Rechen- und Teilbarkeitseigenschaften. Begriffe wie Primzahl, Faktor, ggT oder Kongruenz bilden das semantische Gerüst, innerhalb dessen sich nahezu alle formalen Konzepte bewegen. Was in diesem Raster jedoch systematisch ausgeblendet bleibt, ist die Möglichkeit, dass Zahlen nicht nur Elemente eines abstrakten Rechenraums sind, sondern Träger von Struktureigenschaften, die sich jenseits funktionaler Operationen zeigen, etwa in der Form symmetrischer Anordnungen, wiederkehrender Abstandsmuster oder lokal auftretender Resonanzphänomene.

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Vermutung, dass im Zahlenraum selbst, unabhängig von formaler Definition, ein strukturelles Potenzial wirksam ist, das sich

durch geometrische, schalenartige Ordnungsformen manifestieren kann. Die Beobachtung solcher Muster entspringt dabei nicht einer gezielten Anwendung bekannter Methoden, sondern dem wiederholten Erleben struktureller Auffälligkeiten im Rahmen algorithmischer, visualisierender oder kombinatorischer Zugänge. Die Frage ist nicht, wie eine Zahl in Bezug auf ihre Teiler oder Restklassen beschaffen ist, sondern ob sie innerhalb eines übergeordneten Systems eine erkennbare Position einnimmt, etwa als symmetrisch gespannter Wert um ein Zentrum, als Glied eines strukturell kohärenten Paares oder als Träger emergenter Dichte.

Insbesondere das Faktorisierungsproblem erscheint in diesem Licht nicht nur als rechentechnisch relevantes Thema (etwa im Kontext kryptographischer Verfahren), sondern als Kristallisationspunkt für eine viel grundlegendere Frage: Gibt es im scheinbar ungeordneten Raum der natürlichen Zahlen eine verborgene Tiefe, in der Ordnung nicht konstruiert, sondern entdeckt wird? Und wenn ja: wie lässt sich eine solche Ordnung sichtbar machen, ohne sie im Vorhinein zu postulieren oder durch Definitionszwang zu ersticken?

Diese Problemstellung steht im Hintergrund der vorliegenden Untersuchung, wird jedoch hier nicht im vollen Umfang entfaltet. Vielmehr konzentriert sich dieses Paper auf zwei konkrete Strukturformen, die KQ-Gruppenbildung und die KFS-Schalenstruktur, die als Teilantworten auf diese größere Frage verstanden werden können. Ihre Analyse ist gewissermaßen ein methodischer Seiteneinstieg in ein tieferes Problem: die Möglichkeit, dass Zahl mehr ist als ein Punkt auf einer Zahlengeraden, nämlich Ausdruck einer nichttrivialen, emergenten Strukturrealität.

1.2 Forschungsfragen

Ausgehend von der Annahme, dass sich im Raum der natürlichen Zahlen nicht nur operationale Eigenschaften, sondern auch emergente Ordnungsformen beobachten lassen, ergeben sich mehrere zentrale Fragen, die den inhaltlichen Rahmen dieser Arbeit bestimmen. Im Mittelpunkt steht die Überlegung, ob sich der Zahlenraum nicht nur über äußere Kriterien wie Teilbarkeit oder Kongruenz erschließen lässt, sondern auch über innere Merkmale wie Symmetrieverhältnisse, Abstandsgesetze und zentrumsbezogene Ordnungsmuster.

Eine erste Frage betrifft die Möglichkeit, eine Gruppierungsstruktur wie die Kanonisch-Quasiquadratische Gruppe (KQ) so zu definieren, dass jede natürliche Zahl eindeutig einem übergeordneten Ordnungsgefüge zugeordnet werden kann. Dabei ist zu klären, ob sich für jede Zahl ein Zentrum und ein symmetrischer Umfang bestimmen lassen, innerhalb dessen die relative Position mathematisch eindeutig und strukturell sinnvoll ist.

Daran anschließend stellt sich die Frage, welche Beziehungen zwischen den symmetrischen Positionen innerhalb einer solchen KQ-Gruppe bestehen. Untersucht werden soll, ob diese Beziehungen über bloße Lageähnlichkeit hinausgehen und sich in Form arithmetischer oder geometrischer Besonderheiten manifestieren, etwa durch spezifische Faktorisierungsmerkmale, durch Gleichverteilungen oder durch andere messbare Eigenschaften, die auf eine verborgene Tiefenstruktur hindeuten.

Ein weiterer Fokus liegt auf der k-Fokalen Schalenstruktur (KFS), die um ein frei wählbares Quadratzentrum konstruiert wird. Zu klären ist, ob sich aus dieser Schalenlogik systematisch Paarbildungen erzeugen lassen, die eine nachvollziehbare innere Struktur besitzen. Dabei spielt die Frage eine Rolle, inwieweit diese Struktur unabhängig vom Typ des Zentrums auftritt, also gleichermaßen bei primen, ungeraden nicht-primen sowie geraden Quadratzahlen in konsistenter Weise nachweisbar ist.

Ein zentrales Anliegen der Arbeit ist es außerdem, die beiden Strukturbildungsprinzipien KQ und KFS nicht isoliert zu betrachten, sondern auf mögliche Gemeinsamkeiten hin zu untersuchen. Dabei wird gefragt, ob es übergreifende Ordnungsgesetze gibt, die in beiden Fällen zur Ausbildung vergleichbarer Muster führen, etwa durch die Bildung von Schalenpaaren, durch symmetrische Abstände oder durch wiederkehrende Dichteverteilungen innerhalb definierter Wertebereiche.

Abschließend wird die Frage aufgeworfen, ob aus den beschriebenen lokal wirksamen Ordnungsprinzipien Hinweise auf globale Eigenschaften des Zahlenraums abgeleitet werden können. Von besonderem Interesse ist hierbei, ob sich Regelmäßigkeiten finden lassen, die sich zur Erzeugung teilerfremder Paare, zur Strukturierung großer

Wertebereiche oder zur Entwicklung informationslogischer Anwendungen eignen, und ob diese Regelmäßigkeiten als Ausdruck einer tieferliegenden strukturellen Resonanz im Raum der natürlichen Zahlen verstanden werden können.

1.3 Methodik

Die vorliegende Arbeit folgt keiner im klassischen Sinne linearen oder festgelegten Methode. Stattdessen beruht ihr Zugang auf einem rekursiven Wechselspiel zwischen Beobachtung, Konstruktion und Überprüfung. Der Ausgangspunkt liegt in der systematischen Beobachtung numerischer Phänomene, die nicht unter etablierten Theoremen untersucht werden, sondern im Hinblick auf mögliche strukturelle Eigenschaften. Auffällige Muster, symmetrische Anordnungen oder ungewöhnliche Zahlenverteilungen werden zunächst nicht erklärt, sondern als mögliche Hinweise auf tieferliegende Ordnung genommen und in ihrem Auftreten ernsthaft verfolgt.

Aus diesen Beobachtungen heraus entstehen erste Vermutungen, die durch wiederholtes Rechnen, visuelle Exploration und gezielte Variation numerischer Bereiche geprüft werden. Ein wesentlicher Aspekt dieser Herangehensweise ist die methodische Überdehnung einzelner Zahlenräume, durch die sich Spannungen, Brüche oder charakteristisches Randverhalten offenbaren. Diese Form des strukturellen Testens versteht sich nicht als nebensächlicher Arbeitsschritt, sondern als integraler Bestandteil des Erkenntnisprozesses. Sie ähnelt dem Vorgehen in der Testautomatisierung (mein Tätigkeitsfeld), bei dem ein System durch gezielte Reizsetzung und kontrollierte Belastung zu Reaktionen gebracht wird, die Rückschlüsse auf seine innere Struktur ermöglichen oder Hinweise auf fehlende Stabilisierungsmaßnahmen offenlegt.

Aus dieser Bewegung zwischen Beobachtung und Überprüfung heraus wurden Modelle wie die Kanonisch-Quasiquadratische Gruppenstruktur (KQ) und die k-Fokale Schalenstruktur (KFS) entwickelt. Diese Modelle sind keine reinen Werkzeuge zur Untersuchung, sondern zugleich Resultat und Gegenstand der Analyse. Sie entstehen aus der Beobachtung, werden schrittweise formalisiert, dann als Analyseinstrumente verwendet und im weiteren Verlauf erneut auf ihre Tragfähigkeit und interne

Stimmigkeit hin überprüft. Das Verhältnis zwischen Methode und Untersuchungsobjekt bleibt dabei stets dynamisch.

Eine zentrale Rolle innerhalb dieses Prozesses spielt die visuelle Rückkopplung. Mithilfe von grafischen Werkzeugen werden Muster, Abstandsgesetze, Schalenbildungen und Symmetrieachsen dargestellt. Dies erlaubt eine geometrisch orientierte Sicht auf numerische Strukturen, die durch rein rechnerische Verfahren allein nicht vollständig erschlossen werden können. In dieser Perspektive erscheint die Zahl nicht mehr als isolierter Punkt auf einer abstrakten Linie, sondern als Träger einer Lage, einer Beziehung und eines Positionsgefüges innerhalb eines größeren Zusammenhangs.

Die Methodik dieser Arbeit folgt daher keinem vorgegebenen Schema. Sie entsteht aus einem offenen Erkundungswillen heraus, der Struktur nicht als Voraussetzung setzt, sondern als Möglichkeit behandelt, die sich im Zahlenraum zeigen kann. Es handelt sich um eine Form der struktursuchenden Iteration, bei der aus Beobachtung Hypothesen entstehen, aus Hypothesen Werkzeuge werden und aus Werkzeugen neue Beobachtungen hervorgehen. Das Ziel ist nicht die Prüfung einer These, sondern das Sichtbarmachen von Ordnung, wo sie bislang nicht systematisch erkannt wurde.

2 KQ-Gruppenstruktur

Dieses Kapitel dient der explorativen und systematischen Untersuchung der sogenannten Kanonisch-Quasiquadratischen Gruppenstruktur, abgekürzt als KQ-Gruppen. Es handelt sich dabei um eine vollständig neu formulierte Strukturhypothese zur Gruppierung natürlicher Zahlen, die sich nicht auf klassische Konzepte wie Teilbarkeit, Vielfachheiten oder Restklassen stützt. Stattdessen beruht sie auf einer geometrisch fundierten Zuordnung, aus der sich für jede natürliche Zahl zwei spezifische Werte ableiten lassen.

Die Bezeichnung „kanonisch“ verweist auf die strenge Eindeutigkeit der zugrunde liegenden Regel. Jede natürliche Zahl ist auf genau eine Weise einer Gruppe zugeordnet, es gibt keine Mehrdeutigkeiten, Verzweigungen oder Sonderfälle. Die Struktur wird als „quasiquadratisch“ bezeichnet, weil sie auf einer systematischen Verschiebung der klassischen quadratischen Form basiert. Aus dieser Verschiebung entstehen zwei charakteristische, irrationale Zahlenwerte (die sogenannten $N0$ -Werte bilden eine Ausnahme, auf die im weiteren Verlauf noch näher eingegangen wird), die jeder natürlichen Zahl zugeordnet werden können und in ihrem Verhältnis zueinander eine stabilisierende Geometrie ausbilden.

Diese beiden Zahlen, die sich durch die zugrunde liegende Funktionsform exakt berechnen lassen, bilden für jede Zahl ein individuelles Wertepaar. Ihre dezimalen Nachkommastellen sind stets identisch, sie unterscheiden sich ausschließlich im Vorkommateil. Genau dieser ganzzahlige Anteil ist es, der als Gruppensignatur fungiert: Alle Zahlen innerhalb einer Gruppe teilen sich die gleichen beiden Vorkommateile. Die Gruppenzugehörigkeit ergibt sich somit nicht durch äußerlich sichtbare Eigenschaften, sondern durch eine innere, strukturell identische Geometrie, die sich in der irrationalen Signatur niederschlägt.

KQ-Gruppen sind keine arithmetisch definierten Mengen, sondern Einheiten einer neuen geometrischen Ordnung. Sie unterteilen den Raum der natürlichen Zahlen auf eine Weise, die sich nicht aus traditionellen Rechenoperationen ergibt, sondern aus dem Auftreten einer konsistenten Lagebeziehung innerhalb eines verschobenen quadratischen Bezugssystems. Jede Zahl wird dadurch zum Träger einer Position

innerhalb eines strukturierten Spannungsfeldes, das sich mit wachsendem Zahlenraum immer differenzierter ausfaltet.

Ziel dieses Kapitels ist es, die auf diesem Weg entstehenden Gruppen nicht nur algorithmisch zu erzeugen, sondern ihre internen Eigenschaften im Detail zu analysieren. Im Mittelpunkt stehen die Lage und Bedeutung der Gruppenzentren, das Zusammenspiel von Position, Gruppennummer und innerer Symmetrie, das Verhalten spezieller Zahlen wie der Primzahlen, sowie die durch definierte Mittelpunkte erzeugten räumlichen Verdichtungen und Ausweitungen.

Das vorliegende Kapitel versteht sich als Einstiegspunkt in eine systematisch aufgebaute Analyse und zugleich als Arbeitsinstrument für die weitere Erforschung dieser Struktur. Es richtet sich an Alle, die bereit sind, den Zahlenraum nicht nur als Rechenfeld, sondern als Träger einer emergenten Architektur zu betrachten, deren innere Ordnung durch gezielte Beobachtung, formale Beschreibung und begriffliche Präzision sichtbar gemacht werden kann, denn meine wichtigste Erkenntnis selbst ist mittlerweile: „Zahl ist nicht Punkt – sie ist Raum mit innerer Spannung.“

2.1 Formaler Aufbau der KQ-Gruppen

Im Folgenden wird der mathematisch-formale Aufbau dargestellt. Ziel ist es, die zugrunde liegenden Berechnungsschritte, Begriffsbildungen und strukturellen Elemente so präzise zu formulieren, dass sich jede Gruppenzugehörigkeit einer natürlichen Zahl eindeutig herleiten lässt. Die Darstellung verzichtet dabei auf heuristische oder anschauliche Deutungen und beschränkt sich auf die exakte Definition der verwendeten Größen, der Gruppenbildung sowie der inneren Symmetrieverhältnisse. Jeder Abschnitt behandelt einen zentralen Aspekt der Gruppenstruktur.

2.1.1 Gültigkeitsbereich und Ausgangszahlen

Die KQ-Gruppenstruktur bezieht sich ausschließlich auf den Raum der natürlichen Zahlen. Jede natürliche Zahl N bildet die Grundlage für eine individuelle Gruppenzuordnung, die sich aus einem charakteristischen Wertepaar ergibt.

$$N \in \mathbb{N}, \quad N \geq 1$$

Der Wert $N = 0$ wird in dieser Struktur bewusst ausgenommen, da sich aus der zugrunde liegenden Berechnung für diesen Grenzfall eine singuläre, nicht in die allgemeine Gruppenlogik integrierbare Konstellation ergibt. Für alle $N \geq 1$ lässt sich jedoch das charakteristische Wertepaar eindeutig bestimmen, das die Gruppenstruktur induziert. Wird die Menge der natürlichen Zahlen in ihrer aufsteigenden Ordnung betrachtet, also als streng wachsende Folge

$$N_{\text{geordnet}} = 1, 2, 3 \dots$$

so offenbart sich die KQ-Gruppenstruktur als ein überlagertes Ordnungsprinzip, das jedem N einen strukturell eindeutigen Platz innerhalb eines größeren Gruppenzusammenhangs zuweist. Die Gruppenzugehörigkeit entsteht also nicht aus lokaler Arithmetik, sondern durch die übergreifende geometrisch-analytische Beziehung, die zwischen N und seinem charakteristischen Wertepaar (tp, tq) besteht.

2.1.2 Definition des charakteristischen Wertepaares (tp, tq)

Jeder natürlichen Zahl N wird ein charakteristisches Wertepaar (tp, tq) zugeordnet. Beide Werte ergeben sich aus der Anwendung der Mitternachtsformel auf die durch N parametrisierte quadratische Gleichung

$$x^2 - x - N = 0$$

Diese Gleichung ist eine verschobene Form der elementaren Strukturparabel $x^2 - x$ und beschreibt exakt jene numerische Lage, in der sich eine geordnete Differenz zwischen einem Quadrat und seiner linearen Reduktion auf das jeweilige N einstellt. Die beiden Lösungen der Gleichung lauten:

$$tp = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 + 4N}}{2} = \frac{\sqrt{4N+1} - 1}{2}$$

$$tq = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 + 4N}}{2} = \frac{\sqrt{4N+1} + 1}{2}$$

Es gilt stets:

$$tq = tp + 1$$

Beide Werte sind im Allgemeinen irrational und besitzen identische Nachkommastellen, unterscheiden sich jedoch exakt um eine Einheit im Vorkommateil. Das Wertepaar (tp, tq) fungiert als strukturelle Signatur des jeweiligen N -Wertes und bildet die Grundlage der KQ-Gruppenbildung. Aus geometrischer Sicht können sie als Spiegelwerte auf der Parabelkurve interpretiert werden, wobei die Symmetrieachse zwischen ihnen exakt die Mitte der Gruppe markieren wird.

Hinweis: Die quadratische Gleichung $x^2 - x - N = 0$ besitzt formal stets zwei Lösungen, eine größere positive und eine kleinere negative. Für den Aufbau der KQ-Gruppenstruktur werden beide Lösungen berücksichtigt, allerdings ausschließlich in ihrer positiven Form. Die kleinere negative Lösung fließt daher in die Strukturdefinition nur als positiver Zahlenwert ein, wodurch negative Werte im Kontext der KQ-Struktur keine operative Rolle spielen.

2.1.3 Gruppennummer, Quadratzentrum und Startwert

Die Gruppennummer G ergibt sich als ganzzahliger Vorkommateil des Wertes tq , wird in Folge auch als Tq bezeichnet werden. Sie bezeichnet die Position der KQ-Gruppe in der aufsteigenden Ordnung über den natürlichen Zahlen. Formal gilt:

$$G = \lfloor Tq \rfloor$$

Im Folgenden werden die Gruppenbezeichnungen in der Form $G1$, $G2$, $G3$ usw. verwendet. Dabei steht $G1$ für die Gruppennummer mit $Tq=1$, $G2$ für die Gruppennummer $Tq=2$ usw.

Jede Gruppennummer G kennzeichnet eindeutig die zugehörige KQ-Gruppe und wird als Ordnungszähler der Gruppierung verstanden.

Das Zentrum der Gruppe liegt exakt bei Tq . Es handelt sich dabei nicht um eine ganzzahlige Position im Zahlenstrahl, sondern um den symmetrischen Mittelpunkt der Gruppe im Sinne ihrer Positionen. Aus diesem Mittelpunkt ergibt sich der Startwert der Gruppe, also der Wert $N0$, der die Identität der Gruppe festlegt, jedoch nicht selbst zu den echten Gruppenmitgliedern gehört.

Der Startwert $N0$ ergibt sich durch folgende Formel:

$$N0 = Tq^2 - Tq$$

Die Gruppe selbst beginnt bei $N = N0 + 1$ und enthält ausschließlich die darauf folgenden $Tp + Tq$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Die Position $N0$ ist lediglich formal der identitätsstiftende Ursprung der Gruppe und wird stets mit der internen Gruppenposition 0 bezeichnet.

Da für jede Gruppe gilt $Tq = Tp + 1$, ergibt sich für die Anzahl echter Gruppenmitglieder:

$$Tp + Tq = 2Tp + 1$$

Die Zahl $2Tp + 1$ ist immer ungerade, was sicherstellt, dass jede KQ-Gruppe eine eindeutig identifizierbare symmetrische quadratische Mitte (Tq^2) besitzt. Diese liegt exakt an der Position Tq gezählt ab $N0$.

Da die Werte Tq aufsteigend ab 1 in der Folge 1,2,3,... fortgeführt werden, kann jede Gruppe G exakt nur ein quadratisches Zentrum, das unmittelbar durch Tq^2 definiert ist, besitzen.

2.1.4 Gruppenmitglieder und Positionierung

Eine KQ-Gruppe umfasst zwei unterschiedliche Kategorien von Elementen: Zum einen den Startwert $N0$, der als Ursprungspunkt und strukturelle Identitätsträger der Gruppe dient, zum anderen die darauf folgenden $Tp + Tq$ Positionen, die die zählbaren Gruppenmitglieder bilden.

Die zählbaren Gruppenmitglieder beginnen unmittelbar nach dem Startwert N_0 und erstrecken sich über eine endliche Folge natürlicher Zahlen, deren Länge sich exakt aus der Summe der beiden charakteristischen Werte T_p und T_q ergibt. Diese Positionen sind fortlaufend durchnummeriert, beginnend mit dem Index 1 bis $T_p + T_q$. Der Wertebereich der zählbaren Gruppenmitglieder lautet daher formal:

$$N \in \{N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N_0 + T_p + T_q\}$$

Zur Klarheit führen wir folgende begriffliche Unterscheidung ein:

- **Strukturelle Gruppenmitglieder:** Dazu zählt der vollständige Bereich von N_0 bis $N_0 + T_p + T_q$, inklusive des Startwerts N_0 selbst. Sie bilden die vollständige strukturelle Ausdehnung der Gruppe.
- **Zählbare Gruppenmitglieder:** Diese umfassen nur die fortlaufend nummerierten Elemente ab $N_0 + 1$ bis $N_0 + T_p + T_q$. Sie sind Gegenstand der gruppeninternen Positionierung, Visualisierung und Analyse.

Wenn im weiteren Verlauf von Gruppenmitgliedern gesprochen wird, ist, sofern nicht anders spezifiziert, immer die zählbare Variante gemeint. Wird Bezug auf den Ursprungspunkt N_0 genommen, geschieht dies stets ausdrücklich, etwa in der Form „ N_0 und die Gruppenmitglieder“ oder „alle strukturellen Gruppenmitglieder“.

Jedes zählbare Gruppenmitglied N besitzt dabei eine eindeutige Position innerhalb der Gruppe, gezählt ab $N_0 + 1$. Diese Positionen werden fortlaufend durchnummeriert und im Folgenden als Gruppenpositionen bezeichnet. Zur kompakten Darstellung verwenden wir dafür das Kürzel GP für Gruppenposition, wobei beispielsweise GP1 die erste zählbare Position (also $N_0 + 1$) meint, GP2 dann $N_0 + 2$, und so weiter. Die höchste Gruppenposition ist damit stets $GP(T_p + T_q)$.

Die zentrale symmetrische Position der Gruppe liegt exakt bei Gruppenposition $GP(T_q)$. Diese Position bezeichnet den strukturellen Mittelpunkt der Gruppe.

Damit ergibt sich folgende innere Gliederung:

- Es existieren T_p Positionen vor der Mitte $GP(T_q)$,
- die Position $GP(T_q)$ selbst bildet die Mitte,
- und es folgen weitere T_p Positionen nach der Mitte.

Die Anzahl der zählbaren Gruppenmitglieder bleibt dabei stets:

$$\#zaehlbareGruppenmitglieder = T_p + T_q$$

Abschließend sei angemerkt, dass die Festlegung der Gruppenposition GP0 auf den Startwert N0 sowie der beginnenden Zählung der zählbaren Gruppenmitglieder ab N0+1 (also GP1) zunächst wie eine konventionelle, willkürliche Entscheidung wirken mag. Im weiteren Verlauf dieses Dokuments jedoch wird deutlich werden, dass diese spezifische Zählweise in mehrfacher Hinsicht strukturell motiviert ist. Zahlreiche Beobachtungen innerhalb der KQ-Gruppen legen nahe, dass diese Art der Positionsvergabe nicht nur konsistent, sondern auch erkenntnistragend ist. Auf die entsprechenden Befunde und Argumentationen wird in späteren Abschnitten detailliert eingegangen.

2.1.5 Symmetrie der Struktur

Ein wesentliches Ordnungsmerkmal jeder KQ-Gruppe ist ihre exakt ausgeprägte symmetrische Struktur. Diese Symmetrie bezieht sich auf die Anordnung der zählbaren Gruppenmitglieder, also der Positionen GP1 bis GP($T_p + T_q$), beginnend bei GP1 = N0 + 1. Die Mitte dieser Struktur liegt stets bei Position GP(T_q). Das bedeutet: Die Anzahl der Positionen links der Mitte ist exakt T_p , ebenso die Anzahl rechts der Mitte. Die Mitte selbst ist damit strukturell eindeutig als die Gruppenposition GP(T_q) bestimmt.

Diese Aufteilung erzeugt ein internes Schalenverhältnis: Für jede Gruppenposition N0+1 GP(i) existiert genau ein Schalenpartner GP(i^*) innerhalb derselben Gruppe. Die Schalenpositionierung erfolgt exakt um die Mitte der Gruppe, also GP(T_q). Daraus ergibt sich folgende Regel für die zugehörige Schalenposition:

$$GP(i^*) = 2 * T_q - i$$

Diese Relation gilt für alle Positionen GP(i) innerhalb der Gruppe und erzeugt eine exakte Schalenstruktur um die zentrale Position GP(T_q). Die Schalenpositionierung ist dabei positionssymmetrisch (links/rechts der Mitte), das heißt: Die erste Gruppenposition entspricht der letzten, die zweite der vorletzten usw. Dies lässt sich

abstrakt veranschaulichen, etwa in einer beispielhaften Gruppe G_5 mit $T_q=5$ (und $T_p=4$) mit neun Positionen (also GP1 bis GP9), deren Mitte bei GP5 liegt:

GP1

GP2

GP3

GP4

GP5 (Quadratische Mitte)

GP6

GP7

GP8

GP9

Die entstehenden Schalenpaare lauten dann:

GP1, GP9

GP2, GP8

GP3, GP7

GP4, GP6

wobei GP5 „nur“ sich selbst Schalenpartner ist, als solches aber nicht weiterbetrachtet wird.

In jeder KQ-Gruppe existieren exakt T_p symmetrische Schalenpaare unter den zählbaren Gruppenpositionen. Dies ergibt sich unmittelbar daraus, dass die Schalen um die zentrale Position $GP(T_q)$ nur für die ersten T_p Positionen (also $GP1$ bis $GP(T_p)$) berechnet werden muss. Jedes dieser Elemente besitzt ein eindeutiges Gegenstück auf der rechten Seite der Gruppe, wodurch alle Schalenbeziehungen vollständig und eindeutig abgedeckt sind.

Mit dieser Vorgehensweise kann zu jeder Gruppenposition ihr symmetrischer Schalenpartner innerhalb der Gruppe eindeutig bestimmt werden.

Die Beobachtung zeigt, dass viele arithmetische Beziehungen (etwa der größte gemeinsame Teiler zwischen einem Wert und seiner Schalenposition) innerhalb der Gruppe besondere Muster erzeugen können. Besonders ausgeprägt ist dies bei sogenannten T_q -Primgruppen, bei denen T_q eine Primzahl ist. In solchen Gruppen treten spezielle Resonanzeffekte auf, etwa eine minimale gemeinsame Teilermenge

zwischen Schalenpartnern (etwa 1 oder 1 und 2), die auf tiefere strukturelle Zusammenhänge hinweisen (diese Untersuchungen finden sich in „K-Fokale Schalensymmetrie (KFS)“).

Diese Schalenstruktur bildet die Grundlage für weiterführende Betrachtungen zur vertikalen Schichtung, geometrischen Interpretation und möglichen physikalischen Analogien der KQ-Gruppen im erweiterten Analysekontext.

In der folgenden Abbildung 1 werden die KQ-Gruppen G5 bis G7 gezeigt:

N	tp	tq	TP	Tq	GP
20	4	5	4	5	0
21	4,109772228646440	5,109772228646440	4	5	1
22	4,216990566028300	5,216990566028300	4	5	2
23	4,321825380496480	5,321825380496480	4	5	3
24	4,424428900898050	5,424428900898050	4	5	4
25	4,524937810560440	5,524937810560440	4	5	5
26	4,623475382979800	5,623475382979800	4	5	6
27	4,720153254455280	5,720153254455280	4	5	7
28	4,815072906367320	5,815072906367320	4	5	8
29	4,908326913195980	5,908326913195980	4	5	9
30	5	6	5	6	0
31	5,090169943749470	6,090169943749470	5	6	1
32	5,178908345800270	6,178908345800270	5	6	2
33	5,266281297335400	6,266281297335400	5	6	3
34	5,352349955359810	6,352349955359810	5	6	4
35	5,437171043518960	6,437171043518960	5	6	5
36	5,520797289396150	6,520797289396150	5	6	6
37	5,603277807866850	6,603277807866850	5	6	7
38	5,684658438426490	6,684658438426490	5	6	8
39	5,764982043070830	6,764982043070830	5	6	9
40	5,844288770224760	6,844288770224760	5	6	10
41	5,922616289332560	6,922616289332560	5	6	11
42	6	7	6	7	0
43	6,076473218982950	7,076473218982950	6	7	1
44	6,152067347825040	7,152067347825040	6	7	2
45	6,226812023536850	7,226812023536850	6	7	3
46	6,300735254367720	7,300735254367720	6	7	4
47	6,373863542433760	7,373863542433760	6	7	5
48	6,446221994724900	7,446221994724900	6	7	6
49	6,517834423809100	7,517834423809100	6	7	7
50	6,588723439378910	7,588723439378910	6	7	8
51	6,658910531638180	7,658910531638180	6	7	9
52	6,728416147400480	7,728416147400480	6	7	10
53	6,797259759663210	7,797259759663210	6	7	11
54	6,865459931328120	7,865459931328120	6	7	12
55	6,933034373659250	7,933034373659250	6	7	13

Abbildung 1: KQ-Gruppen GP5 – G7

Die graue Markierungen sind jeweils auf den identitätsstiftenden NO-Positionen, die quadratischen Zentren sind rot markiert. In der Spalte “GP” sind dann die jeweiligen Zählungen innerhalb einer Gruppe beginnen mit GP0 (für N0) und GP1, GP2 etc. zu sehen.

Ein bemerkenswerter Aspekt der KQ-Gruppenstruktur betrifft die Werte der Startpositionen N_0 aller Gruppen. Diese beginnen bei $N_0 = 2$ und setzen sich fort über 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240 ... – eine bekannte Zahlenreihe, die in der Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) unter der Kennung A002378 geführt wird. Es handelt sich hierbei um die sogenannten pronic numbers, auch als rechteckige Zahlen oder oblong numbers bekannt. Diese Zahlen entstehen durch das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen:

$$a(n) = n \cdot (n + 1)$$

Der Wert T_q trägt innerhalb der KQ-Struktur mehrere Bedeutungen zugleich, die bewusst in einem gemeinsamen Namen beibehalten wurden. Er bezeichnet einerseits die Gruppennummer G , die den ganzzahligen Mittelpunkt der jeweiligen KQ-Gruppe bildet. Zugleich steht T_q für die zentrale Gruppenposition innerhalb der Gruppe, also für jene symmetrische Mitte, um die sich alle übrigen Werte in Form ihrer Schalenpaare anordnen. Darüber hinaus spielt T_q auch rechnerisch eine entscheidende Rolle: Durch die einfache Beziehung $T_q - 1 = T_p$ ergibt sich aus ihm direkt der zugehörige Partnerwert T_p , mit dem sich die Gruppengröße und Struktur vollständig rekonstruieren lassen. Die Kenntnis von T_q allein genügt also, um einen gegebenen Wert N eindeutig jener Gruppe zuzuordnen, zu der er gehört.

Die KQ-Gruppen erlauben es, jeder natürlichen Zahl N eine präzise strukturelle Verortung innerhalb eines größeren Ordnungssystems zuzuweisen. Durch die eindeutige Zuordnung eines einzigen Parameters, dem Wert T_q , der zugleich als Gruppennummer G fungiert, erhält jede Zahl eine vollständige geometrisch definierte Identität. Dieser eine Wert genügt, um eine ganze Reihe miteinander verknüpfter Strukturmerkmale offenzulegen: die zugehörige Gruppe G , deren Mittelpunkt (G^2), den zugehörigen Startwert $N_0 = G \cdot (G - 1)$, die Anzahl der Gruppenmitglieder $T_p + T_q = G + (G - 1)$, sowie die exakte Position der Zahl innerhalb dieser Gruppe als Differenz $N - N_0$. Eine Zahl wie $N = 589$ kann damit nicht nur isoliert betrachtet, sondern als Element eines vollständigen Gruppenzusammenhangs bezeichnet werden, etwa als $589/G24$, was ihre strukturelle Zugehörigkeit zur Gruppe mit Zentrum 24^2 ausdrückt.

Die KQ-Struktur bietet damit nicht nur ein analytisches Werkzeug zur Gruppierung, sondern öffnet ein neues System der räumlichen Klassifikation. Jede natürliche Zahl erhält durch die Kenntnis ihres zugehörigen Tq-Wertes eine eindeutig bestimmte Lage innerhalb eines symmetrisch gegliederten Ordnungsraums. Diese Perspektive unterscheidet sich grundlegend von klassischen zahlentheoretischen Zugriffen, in denen eine Zahl meist nur über ihre arithmetischen Eigenschaften beschrieben wird. Mit KQ wird stattdessen ein positionsbasiertes Zuordnungssystem eingeführt, das es erlaubt, den gesamten Zahlenraum in strukturierte Bereiche zu unterteilen, deren Geometrie nicht aus äußeren Operationen hervorgeht, sondern aus einer inneren Beziehung zwischen Zahl, Zentrum und symmetrischer Ausfaltung.

Besonders hervorzuheben ist, dass all diese strukturellen Merkmale allein aus der Kenntnis des Wertes N ableitbar sind. Es bedarf keiner weiteren Zusatzinformation, keiner exogenen Klassifizierung oder vorgelagerten Gruppenzuweisung. Die Berechnung des zugehörigen Tq-Wertes erfolgt unmittelbar aus N selbst und führt auf direktem Weg zu einer vollständigen Verortung innerhalb des symmetrischen Gruppenraums. Damit eröffnet sich aus jeder einzelnen natürlichen Zahl eine eigene, präzise definierte Ordnungswelt, deren interne Struktur nicht bloß interpretativ zugewiesen, sondern rechnerisch aus der Zahl selbst hervorgeholt wird. KQ liefert damit ein konsistentes Modell, das aus isolierten Werten systematische Zugehörigkeit und geometrisch fassbare Beziehung erzeugt, mit einem einzigen Ausgangspunkt: dem gegebenen N .

2.1.6 KQ als Zahlenspielerei?

Die Frage, ob es sich bei der KQ-Struktur lediglich um eine kunstvoll konstruierte Form der Zahlenspielerei oder um eine tatsächlich immanente, also in der Zahlenordnung selbst angelegte Struktur handelt, berührt den grundsätzlichen Unterschied zwischen mathematischer Konstruktion und mathematischer Entdeckung. Die KQ-Systematik basiert nicht auf willkürlichen Klassifikationen oder äußerlich gesetzten Regeln, sondern auf einer wohldefinierten Rechenvorschrift, die jedem natürlichen Wert N ein eindeutig bestimmbares Paar irrationaler Werte (außer N_0), t_p und t_q , zuordnet. Diese beiden Werte wiederum führen zu einer konsistenten Gruppenzuordnung, innerhalb

derer sich klare Symmetrien, definierte Start- und Endpunkte sowie strukturtragende Lagenverhältnisse abbilden lassen.

Bereits der Umstand, dass jeder einzelne N-Wert deterministisch in genau eine Gruppe überführt wird, spricht gegen die Vorstellung einer rein ästhetisch motivierten Systembildung. Stattdessen eröffnet sich hier eine Ordnung, die, obwohl bislang weder benannt noch systematisch erfasst, in sich stabil, widerspruchsfrei und reproduzierbar ist. KQ ist kein dekoratives Bezeichnungssystem, sondern eine Struktur, die aus der Zahl selbst hervorgeht und durch deren innere Dynamik getragen wird. Der zentrale Rechenschritt, mit dem aus N ein verschobener Quadratwurzelwert erzeugt wird, zeigt dabei nicht nur technische Eleganz, sondern führt zu einer Gruppierung, die entlang der Quadratzentren vollständig selbstständig symmetrisch organisiert ist, mit wachsender Gruppengröße, eindeutigem Zentrum und eindeutig berechenbarer Position für jedes Mitglied.

Zudem zeigt sich, dass das System nicht an der Oberfläche seiner Definition verharret. Es macht in der Anwendung neue Phänomene sichtbar: etwa Teilerfremdheit in Gruppen mit primem Quadratzentrum, systematisch wiederkehrende ggT-Verhältnisse zwischen Schalenpaaren oder das Auftreten von vertikal resonanten Teilerstrukturen entlang spezifischer Gruppenschichten. Solche Beobachtungen entstehen nicht aus nachträglicher Interpretation, sondern aus konsequenter Anwendung der KQ-Regeln auf den Zahlenraum selbst. Sie legen nahe, dass KQ mehr ist als ein Klassifikationsraster. Es wirkt wie ein Blickinstrument in eine bislang unkartierte Schicht mathematischer Ordnung, die sich jenseits der klassischen Zahlentheorie entfaltet.

Wenn unter einer immanenten Struktur verstanden wird, dass die Ordnung aus dem Objekt selbst hervorgeht und nicht von außen an es herangetragen wird, dann drängt sich der Eindruck auf, dass KQ einen bislang übersehenen Strukturraum freilegt, der den natürlichen Zahlen innewohnt. Ob dieser Raum Anschluss an größere mathematische, physikalische oder informationstheoretische Modelle bietet, bleibt offen. Doch selbst als autonomes System markiert KQ einen konzeptionellen Übergang: Die natürliche Zahl erscheint hier nicht mehr nur als isolierter Punkt auf einer Zahlenlinie, sondern als eingebetteter Knoten innerhalb eines geometrisch

differenzierten Ordnungskörpers. Und bereits diese Verschiebung im Blick auf den Zahlenraum besitzt erkenntnistheoretisches Gewicht.

2.1.7 Von KQ zu KFS

Die bislang dargestellten Strukturen legen nahe, dass sich im Zahlenraum Ordnungen verbergen, die sich aus den Zahlen selbst heraus entwickeln lassen und nicht auf extern eingeführte Kategorien wie Teilbarkeit oder Vielfachheit angewiesen sind. Die KQ-Gruppen zeigen exemplarisch, wie aus einem einzigen numerischen Ausgangspunkt eine vollständig definierte Position innerhalb eines symmetrischen Gruppenraums abgeleitet werden kann. Dieses Vorgehen, das auf einer konsequent durchgehaltenen internen Logik beruht, eröffnet nicht nur neue Klassifikationsmöglichkeiten, sondern führt zu einem grundlegend veränderten Blick auf die Natur der Zahl selbst.

Wir können mit den Mitteln in KQ ab jetzt unterschiedlichste Vergleiche anstellen, z.B. und Anzahl Teiler vs. Gruppennummern angucken (siehe Abbildung 2):

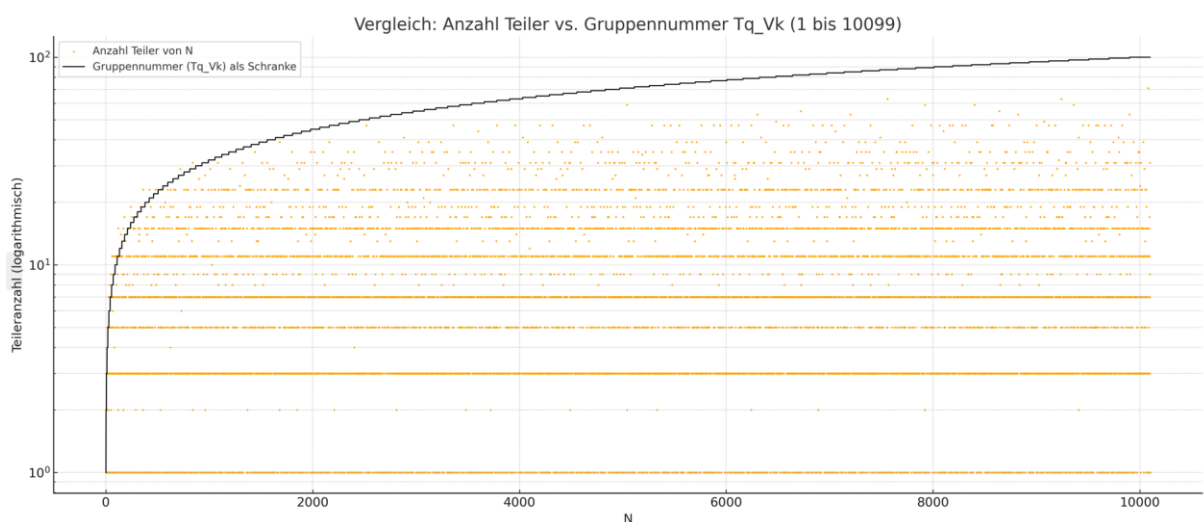


Abbildung 2: Eigene Darstellung, Anz Teiler vs G

Oder eine Art Schwingungsmuster bei Prim-Gruppenpositionen über mehrere Gruppen filtern, z.B. über ggT des Wertes N und der GP3 und GP7 selbst (siehe Abbildung 3 und Abbildung 4):

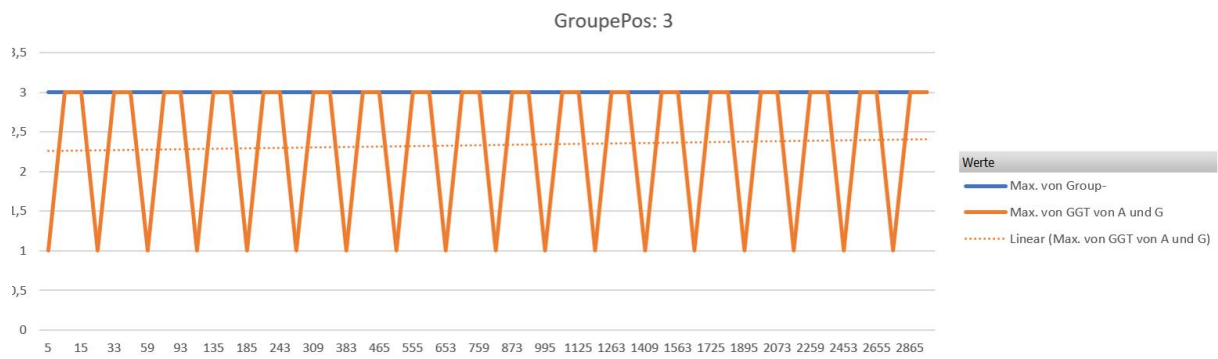


Abbildung 3

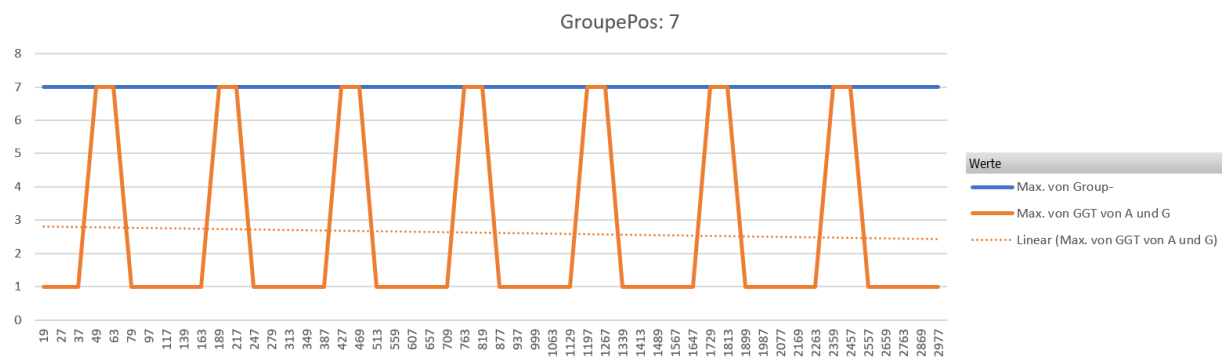


Abbildung 4

Und eben in anderen nicht Prim-Gruppenpositionen ganz andere Schwingungsmuster finden (siehe Abbildung 5):

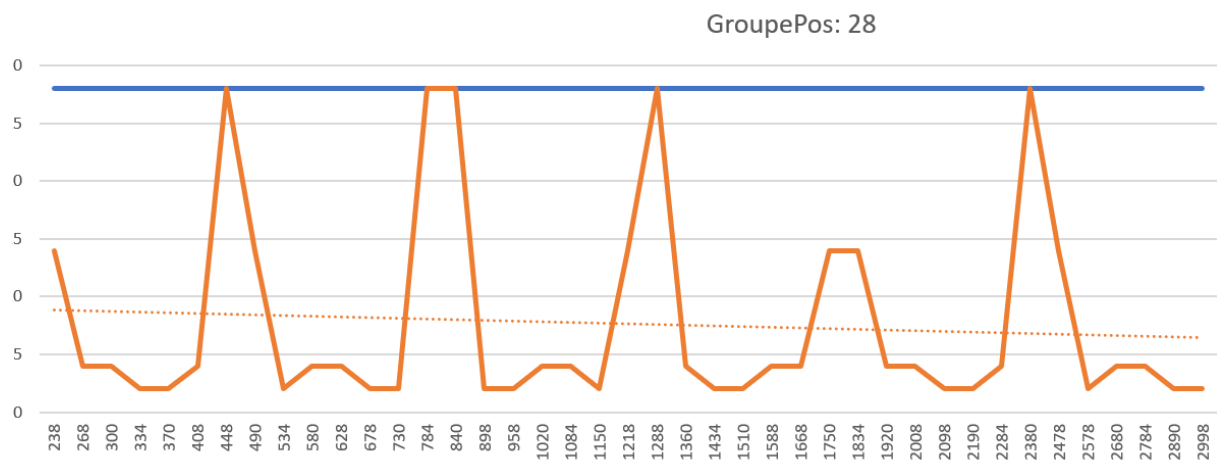


Abbildung 5

Im Anschluss an diese Überlegungen folgt nun die Darstellung eines weiteren Zugriffs auf den Zahlenraum, der sich zwar in der Definition von der KQ-Gruppierung teilweise unterscheidet, aber auf vergleichbare Weise mit der inneren Struktur der natürlichen

Zahlen arbeitet. Die sogenannte k-Fokale Schalenstruktur greift zentrale Elemente wie Symmetrieachsen, Schalenbildung und Zentrumschichten auf, formuliert sie aber in einem weiter gespannten Rahmen aus. Auch hier ist die Ausgangsidee keine willkürliche Setzung, sondern ergibt sich aus Beobachtungen numerischer Verhalten, die sich in strukturierter Form beschreiben lassen.

Ein wesentliches Charakteristikum dieses Zugangs ist, dass er zu Resultaten führt, die unter herkömmlicher Perspektive entweder zufällig oder nur schwer zugänglich erscheinen. So lassen sich mit dem entstehenden System beispielsweise auf einfache Weise Paare natürlicher Zahlen erzeugen, die nachweislich teilerfremd sind, sich gegenseitig nicht ähneln und dennoch durch eine gemeinsame Herkunft im Schalenraum verbunden sind. Diese Zahlenpaare wirken nach außen hin unregelmäßig und nicht vorhersehbar, folgen intern jedoch einer nachvollziehbaren und stabilen Anordnung.

Die Frage, ob es sich bei derartigen Strukturen um bloße Artefakte numerischer Manipulation handelt, stellt sich angesichts dieser Eigenschaften mit neuer Schärfe. Denn während viele Verfahren zur Erzeugung teilerfremder Paare auf probabilistischen oder rekursiven Verfahren beruhen, liefert das vorliegende Modell determinierte Ausgaben mit eindeutig überprüfbaren Eigenschaften. Die anschließenden Kapitel widmen sich der Herleitung, Beschreibung und Untersuchung dieser Struktur. Es wird sich zeigen, dass die damit verbundenen Muster nicht nur in sich geschlossen sind, sondern weitreichende Rückwirkungen auf das Verständnis natürlicher Zahlen im Allgemeinen ermöglichen.

3 K-Fokale Schalensymmetrie (KFS)

Die KFS (K-Fokale Schalensymmetrie) bezeichnet eine strukturelle Eigenschaft innerhalb der natürlichen Zahlen, bei der paarweise spiegelbildliche Werte um das Quadrat einer beliebigen natürlichen Zahl p^2 auftreten. Das Kürzel „KFS“ setzt sich zusammen aus „K“ für „Kern“ oder „konzentriert“, „F“ für „fokal“ – also auf einen Brennpunkt hin ausgerichtet und „S“ für „Schale“ oder „Symmetrie“, je nach Deutungsschwerpunkt. Es unterstreicht damit, dass es sich bei KFS um eine radial organisierte, konzentrisch geschichtete Zahlenanordnung handelt, die in gleichmäßig wachsenden symmetrischen Paaren um ein zentrales Quadrat $Z = p^2$ organisiert ist. Diese Struktur ist nicht dynamisch im Sinne variabler Gruppierungen, sondern fest verankert im Zentrum eines konkreten Quadrats.

Im allgemeinen Aufbau der KFS wird ein Zentrum $Z = p^2$ gewählt, wobei p eine natürliche Zahl größer als 1 ist, unabhängig davon, ob p prim, ungerade oder gerade ist. Um dieses Zentrum werden in regelmäßigen numerischen Schritten Zahlenpaare gebildet, deren Abstand von Z jeweils durch sogenannte Rechteckszahlen oder jede andere beliebige Zahlenfolge definiert ist. Wir betrachten hier vorrangig Rechteckszahlen (abgekürzt: RZ), diese entstehen als Produkte zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und sorgen dafür, dass die resultierenden Schalenpaare exakt um das Zentrum verteilt sind.

Es ergibt sich eine klar definierte, schalenartige Struktur, in der sich jedes Paar (NL für linke Zahlenpartner, NR für rechte Zahlenpartner) als gleich weit links bzw. rechts von p^2 liegend interpretieren lässt. Die gesamte Konstruktion wirkt dadurch nicht nur algebraisch, sondern explizit geometrisch geordnet. Die KFS ist somit als formal selbständige Struktur zu betrachten, deren arithmetische Qualität, etwa Teilerfremdheit oder Faktorisierungsarmut, erst sekundär durch die Beschaffenheit des Zentrums p bestimmt wird.

3.1 Der k-Motor

Im Folgenden wird vor allem der Rechteckszahlen-k-Motor genauer betrachtet werden, es sollte aber nicht vergessen werden, dass es eben jegliche k-Motor Zahlenreihe geben kann. Getestet wurden bereits folgende Reihen:

```
# "linear"           → 1, 2, 3, 4, ...
# "prim"            → 2, 3, 5, 7, ...
# "gerade"          → 2, 4, 6, 8, ...
# "ungerade_nichtprim" → 1, 9, 15, ...
# "quadrade"        → 1, 4, 9, 16, ...
# "fibonacci"       → 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
# "potenzen_von_2"  → 1, 2, 4, 8, 16, ...
# "dreieckszahlen" → 1, 3, 6, 10, 15, ...
# "rechteckszahlen" → 2, 6, 12, 20, 30, ...
modus_k = "rechteckszahlen"
```

Jeweils auf die Zentren: gerade, prim, ungerade_nichtprim.

Ein vollständiges Python-Script für die volle Eroberung der KFS-Systematik kann im Anhang unter „6.2 Der KFS-Motor“ gefunden werden.

Eine interessante Fragestellung an dieser Stelle wäre, welche neuen Einsichten sich über die Primzahlen gewinnen ließen, wenn es gelänge, aus der Riemannschen Zetafunktion eine sinnvoll abstrahierte, ganzzahlige Zahlenreihe zu extrahieren und diese anschließend als k-Motor innerhalb der KFS-Struktur anzuwenden.

3.2 Gültigkeitsbereich und Ausgangszahlen

Die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) gilt für alle natürlichen Zahlenbereiche, in denen das Zentrum der betrachteten Struktur ein Quadrat einer natürlichen Zahl $p > 1$ ist. Das Zentrum Z der Struktur wird dabei stets als das Quadrat dieser Zahl definiert:

$$Z = p^2, \text{ wobei } p \in \mathbb{N} \text{ und } p > 1$$

Ob p dabei eine Primzahl, eine ungerade nicht-prim oder eine gerade Zahl ist, bleibt für die grundsätzliche Konstruktion der KFS zunächst ohne Bedeutung. Die geometrische und arithmetische Struktur der KFS bleibt unter dieser

Verallgemeinerung erhalten. Entscheidend ist lediglich, dass p eine positive ganze Zahl größer als 1 ist und damit $Z = p^2$ als zentrales Schalenzentrum festgelegt werden kann

Um dieses Zentrum $Z = p^2$ werden symmetrische Zahlenpaare konstruiert, deren Abstand zum Zentrum jeweils durch eine sogenannte RZ bestimmt ist. RZ sind Produkte zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und lauten formal:

$$R_k = k \cdot (k-1)$$

Hierbei ist k eine natürliche Zahl mit $k \geq 2$. Jede dieser Rechteckszahlen R_k definiert ein Zahlenpaar, das um das Zentrum Z gespiegelt liegt:

$$NL = p^2 - R_k$$

$$NR = p^2 + R_k$$

Die Anzahl der gültigen Paare, die durch diesen Mechanismus erzeugt werden können, ist durch die Bedingung beschränkt, dass die linke Zahl NL positiv und mindestens gleich p sein muss. Das bedeutet, die größte noch zulässige RZ darf nicht größer sein als:

$$R_{max} = p^2 - p$$

Denn nur solange $R_k \leq p^2 - p$ gilt, bleibt $NL \geq p$ erhalten. Daraus ergibt sich unmittelbar der maximal zulässige k -Wert innerhalb der Rechteckszahlenfolge:

$$k_{max} = p$$

Die Gesamtanzahl der erzeugbaren Paare beträgt somit:

$$\text{Anzahl_Paare} = p - 1$$

Die KFS endet jeweils mit dem letzten gültigen Paar, dessen linke Zahl NL exakt p ist, während die rechte Zahl den maximalen symmetrischen Abstand erreicht hat:

$$NL = p; NR = 2 \cdot p^2 - p$$

Diese allgemeine Konstruktion der KFS ist in ihrer Strukturformulierung unabhängig davon, ob p prim oder zusammengesetzt ist. Erst die nachgelagerte Analyse der Teilerstrukturen und arithmetischen Eigenschaften der erzeugten Paare unterscheidet sich je nach Zentrumstyp, wie in den folgenden Abschnitten aufgezeigt werden wird. Die vorliegende Definition jedoch beschreibt das universelle, für alle gültigen p identische Grundgerüst der KFS.

3.3 Geometrische Anordnung der Paare

Die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) basiert auf einer geometrisch klar definierbaren Anordnung von Zahlenpaaren entlang der Zahlengeraden, wobei jedes Paar symmetrisch um ein zentrales Quadrat $Z = p^2$ gespiegelt ist. Das Zentrum p^2 entsteht dabei aus einer natürlichen Zahl $p > 1$, unabhängig davon, ob p prim, zusammengesetzt oder gerade ist. Die symmetrische Bildung der Paare erfolgt über Rechteckszahl-Abstände R_k , die den gleichmäßigen Abstand der Zahlen zum Zentrum p^2 definieren. Für jedes Paar gilt formal:

$$NL = p^2 - R_k$$

$$NR = p^2 + R_k$$

Diese Konstruktion erzeugt um das Zentrum p^2 eine „Schale“ aus Schalenpaaren, deren jeweilige Entfernung vom Zentrum durch die Größe von R_k bestimmt ist. Mit wachsendem k (Index der Rechteckszahlen) vergrößert sich der symmetrische Abstand der Paare kontinuierlich, wobei sich die gesamte Struktur als konzentrisch aufgebaute Paarfolge um das Zentrum interpretieren lässt. Die gesamte Anordnung bildet eine achsensymmetrische Struktur entlang der natürlichen Zahlenachse.

In einer geometrischen Darstellung lassen sich die resultierenden Paare (NL, NR) als Punktpaare in einem zweidimensionalen Raum auffassen. Wenn man die x-Achse als Abszisse der natürlichen Zahlen und die y-Achse als Höhenlinie des Abstands R_k interpretiert, ergibt sich eine Darstellung, bei der alle Schalenpaare auf einer idealisierten Diagonale mit Steigung 1 liegen, die Differenz zwischen den Elementen eines Paares beträgt stets $2R_k$. Die Bewegung entlang der x-Achse erfolgt dabei über R_k selbst, wodurch die Paare eine wachsende diagonale Struktur aufspannen (siehe Abbildung 6):

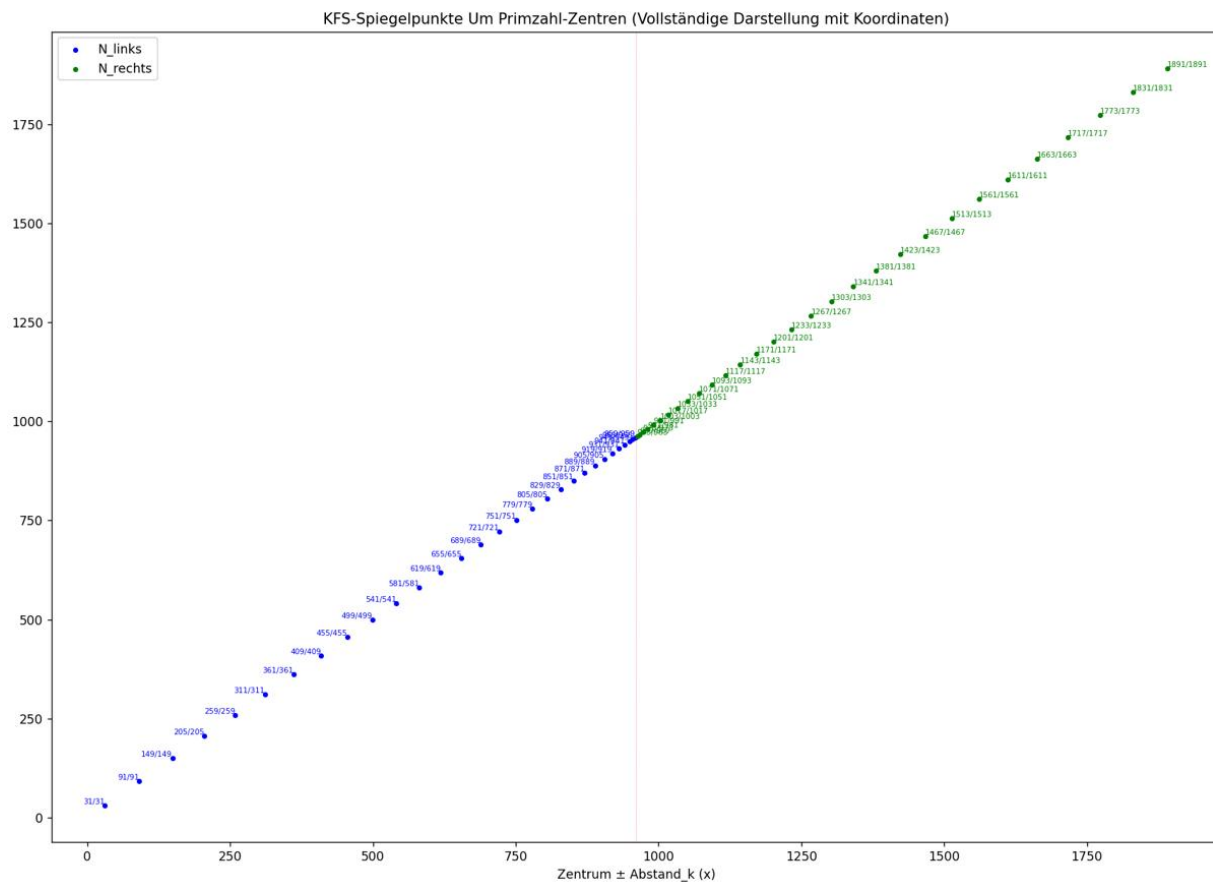


Abbildung 6: eigene Darstellung, Diagonalstruktur KFS Reihe

Die gesamte Struktur spannt ein Rechteck auf, dessen maximale Höhe und Breite durch den größtmöglichen Rechteckszahlwert $R_k = p^2 - p$ bestimmt wird. Daraus ergibt sich:

$$\text{Breite} = \text{Höhe} = 2(p^2 - p)$$

Der geometrische Mittelpunkt dieses Rechtecks ist exakt durch das Zentrum p^2 definiert:

$$M = (p^2, p^2)$$

Das Rechteck ist dabei nicht notwendig quadratisch im konventionellen Sinn, sondern erscheint nur im Endpunkt der KFS-Schale, beim maximal zulässigen Rechteckszahlwert, als ein vollständig ausgeschöpftes symmetrisches Rechteck. In diesem Fall gilt:

$$p^2 - R_k = p$$

$$p^2 + R_k = 2 \cdot p^2 - p$$

Die Differenz der beiden Extremwerte dieses Paares beträgt:

$$\Delta = (2 \cdot p^2 - p) - p = 2 \cdot (p^2 - p)$$

Diese Differenz entspricht der vollen horizontalen Ausdehnung des Rechtecks. Die linke untere Ecke der Figur liegt im Punkt $(p^2 - R_{\max}, p) = (p, p)$, die rechte obere Ecke im Punkt $(p^2 + R_{\max}, 2p^2 - p)$.

In dieser Form ist das Rechteck als Ausdruck der vollständigen Entfaltung der KFS-Schale aufzufassen, wobei alle Spiegelungen symmetrisch um das Zentrum liegen. Es entsteht ein geometrisch konsistentes, lineares Schalenmuster, das unabhängig von der Arithmetik des Zentrums als streng achsensymmetrisches Gebilde existiert. Diese orthosymmetrische Qualität der Anordnung gilt daher für alle möglichen Quadratzentren gleichermaßen und bildet den strukturellen Rahmen der KFS-Geometrie.

3.4 Strukturelle Eigenschaften und Teilverhalten in KFS-Paaren

Die in der K-Fokalen Schalensymmetrie (KFS) erzeugten Zahlenpaare (NL, NR), definiert als symmetrische Schalenpartner um ein Zentrum $Z = p^2$ mit $R_k = k \cdot (k - 1)$, sind zunächst unabhängig von der arithmetischen Natur von p vollständig gleich aufgebaut. Für jede natürliche Zahl $p > 1$ ergibt sich eine KFS-Struktur mit genau $p-1$ konzentrisch angeordneten Paaren, wobei sich der Abstand jedes Paares vom Zentrum durch die Rechteckszahlenfolge R_k ergibt und die Paarwerte berechnet werden über:

$$NL = p^2 - R_k$$

$$NR = p^2 + R_k$$

Dabei ist k eine natürliche Zahl mit $1 < k \leq p$. Die Gesamtstruktur ist durch diese Parameter vollständig determiniert. Jedoch hängt eine entscheidende qualitative Eigenschaft, nämlich das Auftreten gemeinsamer Teiler in den Paaren, wesentlich von

der Art des verwendeten Zentrums ab. Während die geometrische Konstruktion aller KFS-Schalen identisch ist, zeigen sich im Teilverhalten systematische Unterschiede in Abhängigkeit davon, ob das Zentrum p^2 ein Primquadrat, ein ungerades Nicht-Primquadrat oder ein gerades Quadrat ist.

Dieser Umstand motiviert eine Unterteilung der strukturellen Analyse nach Zentrumstyp. Die KFS-Paare lassen sich in ihrer arithmetischen Qualität nicht unabhängig vom Ursprung ihrer Symmetrie verstehen. Entsprechend unterscheidet man:

- Primzentren, also $p \in \mathbb{P}$ (prim)
- Ungerade Nicht-Primzentren, also p ungerade, aber $p \notin \mathbb{P}$
- Gerade Zentren, also p gerade

Im Folgenden werden diese drei Klassen getrennt betrachtet, wobei insbesondere die Rolle der Rechteckszahlen R_k und deren mögliche Teilerüberlappung mit dem Zentrum analysiert wird. Die Frage, ob ein Paar (NL, NR) teilerfremd ist, reduziert sich nämlich auf das Problem der gemeinsamen Teilbarkeit von $p^2 \pm R_k$, was wiederum auf die Beziehung zwischen p und R_k verweist. Eine formale Analyse dieser Teilverhältnisse liefert die Grundlage für weiterführende Anwendungen, etwa in der Zahlentheorie, Kryptografie oder algorithmischen Faktorisierung.

3.4.1 KFS-Struktur bei Primzentren ($p \in \mathbb{P}$)

Wählt man als Zentrum der KFS-Schale das Quadrat einer ungeraden Primzahl, also $Z = p^2$ mit $p > 2$ und $p \in \mathbb{P}$, so ergibt sich eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der gesamten Konstruktion: die vollständige und garantierte Teilerfremdheit jedes gebildeten Schalenpaars (NL, NR). Diese Eigenschaft ist nicht lediglich ein numerisches Zufallsphänomen, sondern folgt notwendig aus der strukturellen Konstellation der Rechteckszahlen R_k im Verhältnis zum Primquadrat-Zentrum.

Zur Erinnerung: Eine Rechteckszahl R_k ist definiert durch das Produkt $k \cdot (k - 1)$, wobei $2 \leq k \leq p$ gilt. Da p prim ist und k strikt kleiner oder gleich p , kann R_k niemals ein Vielfaches von p sein. Dies folgt unmittelbar daraus, dass k und $k-1$ aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und somit keine von beiden p sein kann.

Infolgedessen ist R_k nicht durch p teilbar – und damit auch nicht durch p^2 . Das Zentrum p^2 wiederum ist seinerseits nur durch p faktorisierbar. Somit sind R_k und p^2 notwendigerweise teilerfremd.

Die beiden Schalenpartner eines Paares lauten:

$$NL = p^2 - R_k$$

$$NR = p^2 + R_k$$

Die Frage nach ihrer Teilerfremdheit reduziert sich auf die klassische Zahlentheorie-Identität:

$$\text{ggT}(p^2 - R_k, p^2 + R_k) = \text{ggT}(p^2 - R_k, 2 \cdot R_k)$$

Da p^2 und R_k teilerfremd sind, ist insbesondere auch p^2 und $2 \cdot R_k$ teilerfremd. Damit ist auch $\text{ggT}(p^2 - R_k, 2 \cdot R_k) = 1$, und daraus folgt:

$$\text{ggT}(NL, NR) = 1$$

Diese Beziehung gilt für sämtliche k -Werte im erlaubten Bereich $2 \leq k \leq p$. Die Konsequenz ist eine vollständig systematische Konstruktion von Zahlenpaaren, deren gegenseitige Teilerfremdheit garantiert ist, unabhängig von konkreten Primfaktoren oder Spezialfällen. Lediglich der Sonderfall $p = 2$, mit Zentrum $Z = 4$, stellt eine Ausnahme dar: hier ergibt sich für $R_2 = 2$ das Paar $(2, 6)$, dessen $\text{ggT} = 2$ ist. Diese Ausnahme ist isoliert und hebt lediglich hervor, dass das Schema ab $p > 2$ vollständig trägt.

Die strukturelle Reinheit dieser Paare zeigt sich auch darin, dass weder NL noch NR durch p selbst teilbar sind. Denn wenn $p^2 \pm R_k$ durch p teilbar wäre, müsste auch R_k durch p teilbar sein, was jedoch wie gezeigt ausgeschlossen ist. Die einzelnen Zahlen der Paare tragen also keine offensichtlichen Spuren ihres Ursprungszentrums. Teilerfremde NL - und NR -Paare lassen sich strukturell aus ihrem gemeinsamen Quadratzentrum rekonstruieren; um diese Rückführbarkeit zu unterbinden, sollte man entweder nur wenige Paare preisgeben oder beide Zahlen jeweils mit unterschiedlichen Primzahlen multiplizieren, so bleibt ihre Teilerfremdheit erhalten,

während die ursprüngliche Identität vollständig verschleiert wird. Dies erzeugt eine doppelte Intransparenz: Die Paare sind nicht nur untereinander teilerfremd, sondern auch nicht direkt mit dem Zentrum p^2 verknüpft, zumindest nicht auf faktorieller Ebene. Aus kryptographischer Sicht ist diese strukturelle Entkopplung von großem Interesse, da sie eine schwer rekonstruierbare Erzeugungslinie erlaubt.

Ein weiterer interessanter Aspekt betrifft die Gesamtanzahl dieser Paare. Für ein gegebenes Primzentrum p ergibt sich eine KFS-Schale mit exakt $p - 1$ solchen Paaren. Diese wachsen linear mit der Größe von p , während die jeweiligen Werte NL und NR quadratisch anwachsen (da p^2 der Mittelpunkt ist). Damit erzeugt ein lineares Wachstum der Erzeugungsbasis eine quadratische Streckung im Wertbereich, ein asymmetrischer, aber strukturierter Effekt, der sich bei entsprechender Nutzung skalierend und diffusionsverstärkend auswirkt.

Zusammenfassend stellt die Klasse der Primzentren innerhalb der KFS-Struktur den strukturell reinsten Fall dar: maximale Anzahl, vollständige Teilerfremdheit, klare geometrische Anordnung und hohe faktorisierungstechnische Intransparenz. Der Rechteckmotor entfaltet hier sein vollständiges Potenzial. Die folgende Sektion widmet sich nun der Frage, was geschieht, wenn das Zentrum kein Primquadrat ist, also bei ungeraden Nicht-Primzahlen.

In Abbildung 7 sieht man z.B. das Primzentrum P_{23} mit den Teilerfremdenpaaren NL , NR :

Basiszahl_	Zentrum	Abstand _R	NL	NR	Anzahl_gemeinsame_ Teiler
23	529	2	527	531	1
23	529	6	523	535	1
23	529	12	517	541	1
23	529	20	509	549	1
23	529	30	499	559	1
23	529	42	487	571	1
23	529	56	473	585	1
23	529	72	457	601	1
23	529	90	439	619	1
23	529	110	419	639	1
23	529	132	397	661	1
23	529	156	373	685	1
23	529	182	347	711	1
23	529	210	319	739	1
23	529	240	289	769	1
23	529	272	257	801	1
23	529	306	223	835	1
23	529	342	187	871	1
23	529	380	149	909	1
23	529	420	109	949	1
23	529	462	67	991	1
23	529	506	23	1035	2

Abbildung 7: Eigene Darstellung, Primzentrum 23

Bei jedem dieser Primzentren „fällt“ dann der NL-Wert auf den Basiswert p und nur diese beiden Zahlenpaare, hier NL=23 und NR=1035 haben dann gemeinsame Teiler 1,p. Das gilt für alle Primzentren die mit dem Rechtecks-k-Motor betrachtet werden.

3.4.2 KFS-Struktur bei ungeraden Nicht-Primzentren

Wählt man als Zentrum ein ungerades, nicht-primales Quadrat, also $Z = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ ungerade und zusammengesetzt, so bleibt die strukturelle Grundlage der KFS formal zunächst identisch. Die Rechteckzahlen $R_k = k \cdot (k - 1)$ werden ebenso verwendet, und die Schalenpaare lauten wie gehabt:

$$NL = n^2 - R_k$$

$$NR = n^2 + R_k$$

Auch die obere Grenze der Rechteckschalen ist analog definiert, wobei k soweit steigen darf, bis $R_k = n^2 - n$ erreicht ist, also exakt bis zur letzten Rechteckzahl, bei der $NL \geq n$ noch gewährleistet ist. Formal gilt also auch hier:

$$R_{\max} = n^2 - n$$

und damit:

$$k_{\max} = n$$

Die Differenz zur Primfallstruktur beginnt allerdings mit der Frage nach der Teilerfremdheit. Denn da n nun ein zusammengesetzter, also faktorisierbarer Wert ist, kann es sehr wohl vorkommen, dass R_k einen oder mehrere Faktoren mit n teilt. Sobald dies der Fall ist, ist auch die Teilerfremdheit der gebildeten Paare nicht mehr garantiert.

Genauer: Ist $n = a \cdot b$ mit $a, b > 1$, so besteht stets die Möglichkeit, dass einer der Faktoren in R_k erscheint, insbesondere wenn $k = a$ oder $k = b$ (oder $k - 1$ entsprechend). Die Bedingung, dass $R_k < n^2$, wird davon nicht berührt, wohl aber die strukturelle Integrität der Paare: Denn sobald $p \nmid R_k$ im Primfall zur Garantie wurde, dass keine gemeinsame Teilbarkeit mit dem Zentrum besteht, fällt dieser Schutz nun weg. Es kann also durchaus vorkommen, dass sowohl NL als auch NR gemeinsame Teiler aufweisen, sei es mit dem Zentrum n^2 selbst oder untereinander.

Diese potenzielle Teilbarkeit äußert sich numerisch in einer höheren Wahrscheinlichkeit für $\text{ggT}(NL, NR) > 1$, und empirisch ist zu beobachten, dass die Anzahl echter Teiler der Partnerwerte deutlich höher ist als im Primfall. Insbesondere treten in vielen Paaren kleinere gemeinsame Teiler auf (z. B. 3, 5, 9 etc.), was sich aus der inneren Struktur von n^2 ableitet, denn Rechteckzahlen wie $k(k - 1)$ beinhalten systematisch eine breite Palette kleiner Faktoren, und die Wahrscheinlichkeit, dass einer davon ein Teiler von n ist, steigt mit der Komplexität von n .

Ein weiterer struktureller Effekt ist, dass das Zentrum selbst (n^2) nun ebenfalls in die Faktorisierung der Randzahlen „hineinleuchtet“. Während im Primfall das Zentrum durch keine der Rechteckzahlen „getroffen“ werden kann, besteht hier die Möglichkeit,

dass etwa $NL = n^2 - R_k$ und $NR = n^2 + R_k$ beide Teiler von n enthalten – und somit sich untereinander ebenfalls Teiler teilen. Dies führt zu einer deutlich erhöhten strukturellen Dichte von geteilten Faktoren innerhalb der Schale, was sich auch grafisch an einer unruhigeren, weniger faktorisierungsarmen Landschaft ablesen lässt.

In der Gesamtbewertung bedeutet dies, dass ungerade Nicht-Primzentren in KFS-Strukturen zwar formal dasselbe Rechteckprinzip erlauben, aber keine Garantie auf Teilerfremdheit bieten. Vielmehr handelt es sich um ein strukturell durchlässigeres System, dessen Partnerpaare zwar symmetrisch, aber nicht exklusiv sind. Insofern stellen sie eine Erweiterung der KFS-Idee in einen weniger disziplinierten Raum dar, womöglich nützlich für bestimmte systemische Analysen, aber ungeeignet für Anwendungen, bei denen teilerfreie Zahlenpaare zwingend erforderlich sind.

Im nächsten Abschnitt folgt eine vergleichbare Betrachtung der KFS-Struktur bei geraden Quadratzentren.

3.4.3 KFS-Struktur bei geraden Quadratzentren

Wird das Zentrum einer KFS-Struktur als Quadrat einer geraden Zahl definiert, also $Z = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gerade, ergeben sich im ersten Schritt formal dieselben Konstruktionsprinzipien wie in den zuvor beschriebenen Fällen. Auch hier bilden Rechteckzahlen der Form $R_k = k \cdot (k - 1)$ die Grundlage der symmetrischen Spiegelung:

$$NL = n^2 - R_k$$

$$NR = n^2 + R_k$$

Die maximale gültige Rechteckzahl ergibt sich, wie gehabt, durch die Bedingung $R_k \leq n^2 - n$, da ansonsten $NL < n$ wäre. Auch hier gilt:

$$R_{\text{max}} = n^2 - n$$

$$k_{\text{max}} = n$$

Die strukturelle Symmetrie der erzeugten Paare bleibt also gewahrt, auch die geometrische Entfaltung, das Abbilden in ein Rechteck mit dem Zentrum n^2 als Mitte, folgt exakt denselben Regeln. Was sich jedoch wesentlich unterscheidet, ist die

Teilerstruktur innerhalb der erzeugten Paare. Denn sobald das Zentrum n^2 gerade ist, also n eine gerade Zahl, ist n^2 zwangsläufig durch 4 teilbar, und selbst die kleinsten Rechteckzahlen (etwa $R_2 = 2$) können zu Paaren führen, in denen sowohl NL als auch NR gerade sind.

Das bedeutet: Die Zahl 2, die kleinste nichttriviale Teilerzahl, wird nun systematisch Bestandteil vieler Paare. Die vollständige Eliminierung gemeinsamer Teiler (wie sie im Fall p prim durch die Inkompatibilität von p und R_k garantiert wurde) ist hier nicht gegeben. Ganz im Gegenteil: Die Tatsache, dass sowohl das Zentrum als auch große Teile der Rechteckstruktur gerade sind, führt zu einer systematischen Erhöhung der gemeinsamen Teilerwahrscheinlichkeit, insbesondere bzgl. 2.

Beispielhaft sei $Z = 16$ betrachtet ($n = 4$). Die Rechteckzahlen R_k von $k = 2$ bis $k = 4$ lauten:

$$R_2 = 2, R_3 = 6, R_4 = 12$$

Die daraus entstehenden Paare sind:

$$(14, 18), (10, 22), (4, 28)$$

Alle sechs Werte sind gerade. Bereits hier zeigt sich, dass eine Teilerfremdheit der Paare im strengen Sinn nicht gegeben ist, sondern im Gegenteil eine maximale Überlappung bezüglich der Teilbarkeit durch 2 vorliegt. Auch die ggT-Werte innerhalb einzelner Paare (z. B. $\text{ggT}(10, 22) = 2$ oder $\text{ggT}(4, 28) = 4$) sind signifikant größer als 1.

Dieses Verhalten lässt sich strukturell erklären: Rechteckzahlen mit geradem k sind stets gerade, bei ungeradem k dagegen entsteht ein Produkt zweier benachbarter Zahlen, also eine gerade und eine ungerade, was ebenfalls wieder eine gerade Zahl ergibt. Rechteckzahlen sind damit per Konstruktion immer gerade. Das bedeutet: Die Addition oder Subtraktion von R_k zu einem geraden Quadrat n^2 führt unausweichlich zu zwei geraden Werten NL und NR, die also mindestens durch 2 teilbar sind. Es entsteht ein System, das strukturell mit redundanter Teilbarkeit aufgeladen ist, und damit das Gegenteil einer teilerarmen Architektur darstellt.

Das Resultat ist eine vollständig symmetrische, aber faktorisiereiche Struktur. Die geometrische Harmonie bleibt erhalten, doch die algebraische Qualität der Zahlen ist für Anwendungen mit hohem Anspruch an Teilerfremdheit ungeeignet. Es handelt sich um ein KFS-System mit dominanter Multipelstruktur, dessen erklärbare Regelmäßigkeit zwar interessant ist, etwa für Studien über strukturelle Dichte und Teilbarkeit, das aber nicht als Lieferant effizienter, disjunkter Zahlenpaare taugt.

Damit sind alle drei Zentrumstypen, Primquadrate, ungerade Nicht-Prims und gerade Quadrate, systematisch hinsichtlich ihrer KFS-Eigenschaften untersucht. Im nächsten Schritt lässt sich daraus eine Hierarchie ableiten, in der Primzentren den höchsten Grad an Teilerfremdheit und struktureller Einfachheit aufweisen, während ungerade Nicht-Prim und insbesondere gerade Zentren zunehmend komplexere, teilerüberladene Paarlandschaften erzeugen.

3.4.4 Vergleichende Analyse der Zentrumstypen und ihrer Teilerstruktur

Die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) ist formal für jedes Zentrum der Form $Z = n^2$ definierbar, wobei n eine natürliche Zahl größer als 1 ist. Dabei bleibt die grundlegende geometrische Konstruktion, bestehend aus symmetrischen Schalenpaaren (NL, NR) mit Abstand $R_k = k(k - 1)$ vom Zentrum, für alle Zentrumstypen identisch. In allen Fällen ergibt sich eine rechteckige, symmetrische Struktur entlang der Zahlengeraden die wieder auf n bei NL fällt, deren Erzeugungsprinzip auf der zentrischen Addition und Subtraktion von Rechteckzahlen beruht. Doch obwohl die Geometrie invariant bleibt, offenbart sich in der arithmetischen Tiefe eine wesentliche Differenzierung: die qualitative Struktur der erzeugten Zahlenpaare hängt entscheidend vom Typ des Zentrums n^2 ab.

Im Fall eines Primzentrums, also n prim, Zentrum $Z = p^2$, lässt sich formal beweisen, dass für alle gültigen Rechteckabstände $k < p$ die Bedingung $\text{ggT}(p^2 - R_k, p^2 + R_k) = 1$ erfüllt ist. Diese garantierte Teilerfremdheit beruht auf zwei ineinandergreifenden Tatsachen: Erstens ist p^2 als Zentrum nur durch p teilbar, und zweitens ist jede Rechteckzahl $R_k = k(k - 1)$ für $k < p$ nicht durch p teilbar. Damit bleibt auch die Summe und Differenz von R_k mit p^2 frei von Teilbarkeitsüberlappungen. Die erzeugten

Zahlenpaare sind somit strukturell disjunkt und in ihrer Primfaktorstruktur maximal separiert.

Besonders im zentralen Bereich nahe dem Zentrum p^2 zeigen die einzelnen Werte NL und NR der erzeugten Paare häufig eine auffallende strukturelle Schlichtheit: Sie besitzen jeweils nur zwei oder drei echte Teiler, das heißt, abgesehen von 1 und sich selbst enthalten sie oft nur einen oder zwei weitere Primfaktoren. Diese innere Teilerarmut betrifft die Zahlen individuell, nicht als Paar, und steht in keinem Zusammenhang mit gemeinsamen Teilern zwischen NL und NR (deren ggT immer exakt 1 ist). Vielmehr handelt es sich um eine arithmetische Eigenschaft der Einzelglieder, die in der Nähe des Primzentrums besonders häufig auftritt. Diese Beobachtung verweist auf eine implizite Klarheit der Konstruktion, in der nicht nur die Paarbildung selbst disjunkt erfolgt, sondern auch die resultierenden Zahlen in ihrer inneren Faktorisierung maximal reduziert bleiben.

Für Quadratzentren, bei denen n ungerade, aber nicht prim ist, etwa $n = 9, 15$ oder 21 , bleibt die geometrische Schalenstruktur formal vollständig erhalten. Auch hier sind alle Rechteckzahlen $R_k = k(k - 1)$ für $k < n$ gültig, und es ergeben sich konzentrische Schalen symmetrischer Zahlenpaare. Arithmetisch jedoch verändert sich die Struktur grundlegend: Da n selbst bereits ein Kompositum aus mehreren Primfaktoren ist, besteht nun die Möglichkeit, dass einer dieser Faktoren mit R_k oder $2 \cdot R_k$ teilt. Empirisch bestätigt sich dies durch eine deutlich erhöhte Häufigkeit von Paaren, deren gemeinsamer Teiler größer als 1 ist. Die systematische Teilerfremdheit geht verloren. Zwar treten auch hier einzelne teilerarme Paare auf, insbesondere im Bereich kleiner k , doch ohne strukturelle Garantie und ohne analytisch saubere Trennung zwischen Zentrum und erzeugten Werten. Es entsteht eine arithmetisch durchlässige Struktur, die zwar geometrisch identisch bleibt, inhaltlich jedoch an Schärfe verliert.

Noch gravierender ist die Situation bei geraden Quadratzentren, etwa $n = 4, 6, 8$ usw. Da hier sowohl das Zentrum n^2 als auch jede Rechteckzahl R_k systematisch durch 2 teilbar sind, folgt notwendigerweise: Die Paare (NL, NR) besitzen stets einen $\text{ggT} \geq 2$. Unabhängig von der Wahl von k ergibt sich also eine durchgehende Verletzung der strukturellen Teilerfremdheit. Zusätzlich fällt auf, dass die absolute Anzahl echter Teiler pro Zahl, also aller Divisoren außer 1 und der Zahl selbst, signifikant ansteigt.

Rechteckzahlen in Kombination mit einem durch 4 teilbaren Zentrum führen zu systematischer Teilerdichte und hoher Faktorisierungswahrscheinlichkeit. Damit geht die Fähigkeit zur Erzeugung disjunkter, faktoriell isolierter Paare vollständig verloren.

Diese Differenzierung lässt sich sowohl qualitativ als auch analytisch in einer synoptischen Übersicht verdeutlichen:

Zentrumstyp	ggT(NL, NR)	Häufigkeit echter Teiler	Strukturelle Bewertung
N prim (ungerade)	exakt 1	ausgeschlossen	garantierte Teilerfremdheit, hohe Teilerarmut, disjunkt
n ungerade, nicht prim	oft > 1	mittel, heterogen	geometrisch stabil, arithmetisch durchlässig
n gerade	stets ≥ 2	hoch	systematisch teilerdicht, strukturell entkoppelt

Tabelle 1: Teilerfremdheit

Diese Tabelle bringt zum Ausdruck, dass Primzentren keineswegs nur eine Spezialform der KFS-Struktur darstellen, sondern vielmehr deren funktionale Essenz verkörpern. Nur in diesem Fall verbinden sich geometrische Symmetrie, analytische Reinheit und faktorisierungsresistente Paarbildung zu einer integralen Struktur. Andere Zentrumstypen bleiben formal zulässig, liefern jedoch Paare mit reduzierter arithmetischer Nutzbarkeit. Gerade in Kontexten, in denen kontrollierte Teilerfremdheit, geringe Faktordichte oder garantierte Irreduzibilität erforderlich sind, etwa in der Kryptographie oder in der algorithmischen Zahlentheorie, bietet einzig das Primquadrat-Zentrum eine konsistente Grundlage. In diesem Sinne ist die strukturelle Sonderstellung der Primzentren nicht eine Einschränkung, sondern die notwendige Voraussetzung für die volle Leistungsfähigkeit der KFS-Methode.

3.5 Diagonalstruktur und Rechteckvergleich

Die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) offenbart nicht nur algebraische, sondern auch ausgeprägt geometrische Eigenschaften. Jedes Zahlenpaar (NL, NR), das durch Subtraktion bzw. Addition einer Rechteckzahl R_k von einem Zentrum $Z = n^2$ gebildet

wird, erzeugt ein implizites Rechteck im zweidimensionalen Zahlenraum. Diese Rechtecke lassen sich durch die Koordinaten:

$$(x, y) = (R_k, NL) \quad \text{und} \quad (x, y) = (R_k, NR)$$

beschreiben. Das bedeutet, dass für jedes R_k ein symmetrisches Wertepaar links und rechts vom Zentrum entsteht, das zugleich eine Höhe von $2 \cdot R_k$ (Differenz zwischen NR und NL) und eine Breite von R_k besitzt. Diese Rechtecke zeichnen sich durch eine feste Diagonalstruktur aus, die in der expliziten Formel:

$$D_{\text{rechteck}} = \sqrt{(2R_k)^2 + (R_k)^2} = R_k \cdot \sqrt{5}$$

zum Ausdruck kommt.

Besonders bemerkenswert ist, dass diese Rechtecke, unabhängig vom Zentrumstyp, ihre Diagonalen exakt auf einer Linie mit Steigung 1 anordnen, also entlang der Geraden $y = x$. Dies ergibt sich daraus, dass die symmetrisch gewählten Werte $NL = n^2 - R_k$ und $NR = n^2 + R_k$ für jedes k den Mittelpunkt des Rechtecks stets auf das Zentrum n^2 zentrieren. In der grafischen Darstellung ergibt sich eine perfekte orthogonale Verschränkung zwischen algebraischer Spiegelung und geometrischer Ausrichtung.

Ein Vergleich mit dem zentralen Quadrat, das durch (n, n) beschrieben werden kann, also dem Punkt, an dem sich die Diagonale eines echten Quadrats mit dem Zentrum n^2 als Fläche aufspannen würde, ergibt zusätzlich eine bemerkenswerte strukturelle Überlagerung. Denn für das letzte gültige Rechteck in der KFS, das durch $R_k = n^2 - n$ definiert ist (entsprechend $k_{\text{max}} = n$), ergibt sich:

$$NL = n \quad \text{und} \quad NR = 2 \cdot n^2 - n$$

Die Diagonale dieses Rechtecks besitzt dann eine Länge von:

$$D_{\text{max}} = \sqrt{(2 \cdot (n^2 - n))^2 + (n^2 - n)^2} = (n^2 - n) \cdot \sqrt{5}$$

Das Quadrat mit Seitenlänge $2 \cdot (n^2 - n)$ hätte dagegen die Diagonale:

$$D_{\text{quadrat}} = \sqrt{2} \cdot (n^2 - n)$$

Diese beiden Diagonalen, aus Rechteck und Quadrat, stehen in einem irrationalen Verhältnis von $\sqrt{5}$ zu $\sqrt{2}$. Dennoch überlappen sich die Eckpunkte der Rechtecke exakt mit dem Anfangs- und Endpunkt der betrachteten KFS-Schale. Die geometrische Identität wird damit nicht durch Maßeinheit oder Gleichheit der Flächen erzeugt, sondern durch die exakte symmetrische Spiegelung, welche das Rechteck in ein übergeordnetes Ordnungssystem einbettet.

Diese Diagonalstruktur lässt sich universell für jede Wahl von $Z = n^2$ anwenden. Sie bleibt bei Primzentren wie bei Nicht-Primzentren oder geraden Zentren vollständig erhalten. Lediglich die arithmetischen Eigenschaften der erzeugten Zahlenpaare, etwa in Bezug auf ggT, unterscheiden sich, während die geometrische Einbettung der Rechtecke vollständig invariant bleibt.

Damit wird deutlich: Die KFS ist nicht nur eine arithmetische oder numerisch motivierte Konstruktion, sondern zugleich eine strikt geometrische Architektur. Ihre Aussagekraft entfaltet sich erst dann vollständig, wenn algebraische und geometrische Deutungsebenen zusammengeführt werden, eine Eigenschaft, die sie von vielen anderen Zahlenstrukturen unterscheidet.

3.6 Anzahl und Dichte der Paare (verallgemeinert)

Die Anzahl der innerhalb einer KFS-Struktur erzeugbaren Schalenpaare (NL, NR) hängt ausschließlich von der zugrunde liegenden Quadratwurzel des Zentrums ab. Ist das Zentrum durch eine natürliche Zahl n gegeben, so gilt $Z = n^2$, unabhängig davon, ob n prim, ungerade nicht prim oder gerade ist. Aus dieser Definition ergibt sich eine maximale Rechteckdifferenz von:

$$R_{\text{max}} = n^2 - n$$

Da jede Rechteckszahl $R_k = k(k - 1)$ lauten muss und damit monoton wächst, ergibt sich der maximale Index k_{max} , der noch eine Rechteckzahl innerhalb des gültigen Bereichs liefert, aus der Ungleichung:

$$k(k - 1) \leq R_{\text{max}} = n^2 - n$$

Diese kann explizit aufgelöst werden, führt aber stets zum Grenzwert:

$$k_{\max} = n$$

Für jede KFS-Struktur um ein Zentrum $Z = n^2$ entstehen somit $n - 1$ gültige Paare (NL, NR), die durch die Rechteckzahlen R_k mit $2 \leq k \leq n$ erzeugt werden. Diese Paare sind symmetrisch um das Zentrum angeordnet und liegen vollständig im Intervall:

$$(n, 2n^2 - n)$$

bzw. symmetrisch:

$$(n^2 - R_{\max}, n^2 + R_{\max}) \quad \text{mit} \quad R_{\max} = n^2 - n$$

Die Länge dieses Intervalls beträgt:

$$L = 2 \cdot (n^2 - n) + 1 = 2n^2 - 2n + 1$$

Da innerhalb dieses Intervalls genau $n - 1$ Paare (also $2(n - 1)$ Einzelwerte) liegen, ergibt sich die durchschnittliche Dichte der Struktur als Verhältnis:

$$\text{Dichte} \approx (2 \cdot (n - 1)) / (2n^2 - 2n + 1)$$

Diese Formel zeigt, dass die Dichte der KFS-Paare mit wachsendem n langsam abnimmt. Während die Anzahl der Paare linear mit n wächst, steigt die Länge des Intervalls quadratisch. Für große n nähert sich die Dichte asymptotisch gegen:

$$\text{Dichte} \approx 1 / n$$

Diese Beobachtung hat zwei wichtige Konsequenzen. Erstens: Die Struktur bleibt auch bei großen Zentrumswerten effizient, sie wächst mit n , ohne den Rahmen der Berechenbarkeit zu sprengen. Zweitens: Ihre Verteilung bleibt weitmaschig genug, um insbesondere bei Primzentren eine hohe strukturelle Eindeutigkeit zu sichern, ohne in übermäßige lokale Häufung zu verfallen.

Wichtig ist dabei die Unterscheidung zur klassischen Dichtebetrachtung über Intervallanzahl: Die KFS liefert deterministisch platzierte Paare, keine zufälligen Streuungen. Ihre Dichte ist nicht statistisch, sondern konstruktiv. Dies macht die

Struktur besonders geeignet für Anwendungen, bei denen regelmäßige, aber schwer vorhersagbare Verteilungen gewünscht sind, etwa in der algorithmischen Zahlenverarbeitung, in der Generierung strukturierter Pseudodaten oder in der Faktorisierungsanalyse großer Zahlenräume.

3.7 Anwendungsperspektiven der KFS-Struktur

Die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) stellt ein bemerkenswertes Verfahren zur systematischen Erzeugung strukturierter Zahlenpaare bereit. Ihr zentrales Merkmal – die Spiegelung um ein Quadrat $Z = p^2$ mit einem geeigneten Wert p , ermöglicht es, Paare (NL, NR) zu erzeugen, die nicht nur symmetrisch, sondern unter bestimmten Bedingungen auch garantiert teilerfremd sind. Dies hebt die KFS-Struktur deutlich von zufallsbasierten oder heuristischen Methoden ab, bei denen Teilerfremdheit weder garantiert noch effizient überprüfbar ist. Gerade bei p prim tritt ein qualitativ neuer Zustand ein: eine simultane Kombination aus geometrischer Klarheit, algebraischer Einfachheit und arithmetischer Robustheit.

In den folgenden Abschnitten sollen verschiedene Anwendungsszenarien vorgestellt werden, bei denen diese besondere Kombination aus Eigenschaften einen konkreten funktionalen oder theoretischen Vorteil verschaffen könnte. Im Mittelpunkt steht dabei zunächst das bemerkenswerte Potenzial, mit hoher Geschwindigkeit große Mengen vollständig teilerfremder Zahlenpaare zu erzeugen.

Eine einfache Python-Umsetzung dazu kann im Anhang unter „6.1 Python Script für garantiert teilerfremde Zahlenpaare“ gefunden werden.

3.8 Garantiert teilerfremde Zahlenpaare – strukturell erzeugt

In vielen Bereichen der Mathematik und Informatik sind Paare natürlicher Zahlen mit $\text{ggT} = 1$ eine essenzielle Voraussetzung, etwa bei modularer Inversion, bei RSA-basierten Schlüsselsystemen oder bei der Konstruktion irreduzibler Brüche. Üblicherweise erfolgt die Erzeugung solcher Paare entweder über Zufallszahlen mit nachträglicher Prüfung (ggT-Test) oder über explizit konstruierte Verfahren, etwa

mithilfe der Eulerschen φ -Funktion. Beide Varianten sind aufwendig: entweder in Bezug auf Rechenzeit oder auf ihre algorithmische Implementierung.

Die KFS-Struktur bietet hier einen konzeptionellen Durchbruch: Bei jedem Zentrum $Z = p^2$ mit p prim ist durch die Konstruktion selbst gewährleistet, dass alle zugehörigen Paare $(NL = p^2 - R_k, NR = p^2 + R_k)$ für $1 < k < p$ teilerfremd sind. Das bedeutet: Für jede beliebige Primzahl $p > 2$ lassen sich exakt $p - 2$ (da NL auf p selbst fällt, wird dieses Zahlenpaar nicht mitberechnet) vollständig teilerfremde Paare erzeugen, direkt, deterministisch und ohne weiteren Prüfaufwand.

Diese Eigenschaft ist in mehrfacher Hinsicht praktisch relevant. Im Folgenden sollen einige exemplarische Disziplinen skizziert werden, in denen diese Paare funktional nutzbar oder strukturell vorteilhaft sind:

3.8.1 Kryptographie

Insbesondere im Umfeld asymmetrischer Kryptosysteme (z. B. RSA) ist die Wahl geeigneter teilerfremder Werte entscheidend. Die Sicherheit der Verfahren hängt davon ab, dass bestimmte Werte, etwa der öffentliche Schlüssel e , in einem bestimmten Verhältnis (z. B. $\text{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$) zur Struktur des Systems stehen. Statt solche Werte aufwendig per Zufallssuche oder heuristischen Tests zu finden, kann die KFS-Struktur eine deterministische Erzeugung garantierter Kandidaten liefern, etwa durch Auswahl eines geeigneten Paares (NL, NR) , aus dem e oder andere Parameter abgeleitet werden. Besonders der mittlere Bereich der KFS-Schale bietet durch seine geringe Sichtbarkeit im p -Raum einen strukturellen Verschleierungsvorteil.

3.8.2 Zahlentheorie

In klassischen Konstruktionen der Zahlentheorie, etwa beim Chinesischen Restsatz oder der Bildung von multiplikativen Inversen, ist Teilerfremdheit zentrale Voraussetzung. KFS-Paare liefern nicht nur sichere Startwerte, sondern erlauben es, bestimmte arithmetische Regionen gezielt mit teilerfremden Eingaben zu besetzen, etwa für Zählfunktionen, Restklassenverteilungen oder den Aufbau strukturierter Gruppenhomomorphismen. Die kontrollierte Differenz der KFS-Paare (über $R_k = k(k - 1)$) gestattet dabei ein feines Tuning der arithmetischen Abstände im Zahlenstrahl.

3.8.3 Informationssicherheit

Digitale Fingerabdrücke, kryptografische Hashes oder Blockchain-Verkettungen benötigen Eingangswerte mit möglichst geringer arithmetischer Redundanz. KFS-Paare garantieren $\text{ggT} = 1$, sind strukturell dispers und lassen sich in hoher Dichte erzeugen. Ihre deterministische Herkunft erschwert Rückschlüsse auf die Erzeugungslogik (sofern p unbekannt bleibt; die weitere Verschleierung von NL , NR ist durch einfache Multiplikation mit unterschiedlichen Primzahlen leicht realisierbar), ermöglicht aber gleichzeitig die Wiederherstellung oder Validierung durch berechnete Systeme. Das macht sie zu idealen Kandidaten für Hash-Salting, Authentifizierungscodes oder strukturelle Nonce-Erzeugung.

3.8.4 Algorithmische Testverfahren

Algorithmen zur Berechnung des ggT , modularer Inversen oder der Erkennung von Teilerbeziehungen profitieren von gezielt strukturierten Eingabewerten. KFS-Paare stellen eine kontrollierte Menge an Testdaten bereit, die garantiert teilerfremd sind, aber nicht trivial, weil sie aus einem gemeinsamen geometrischen Ursprung stammen. Dadurch lassen sich etwa Benchmarks erzeugen, die echte Extrembedingungen testen, etwa für Software zur rationalen Vereinfachung, Restklassenanalyse oder Primtestunterstützung.

3.8.5 Komplexitätstheorie

Schließlich bietet die garantierte Teilerfremdheit bei verborgener Herkunft (nur p^2 bekannt, p nicht) ein interessantes Werkzeug zur Erzeugung von Datenpaaren, deren innere Struktur schwer rekonstruierbar ist. In der Untersuchung faktorisierungsnaher Probleme (z. B. Rückführung auf p) oder in Zero-Knowledge-Szenarien lässt sich mit KFS-Paaren eine kontrollierte Intransparenz erzeugen: das Paar selbst ist einfach, seine Herkunft jedoch verborgen, ein Idealzustand für viele kryptographische und theoretische Untersuchungsformate.

3.8.6 Geometrisch strukturierte Paarerzeugung

Unabhängig von der garantierten Teilerfremdheit in Primzentren stellt die K-Fokale Schalensymmetrie (KFS) ein generatives System dar, das auf Basis einfacher mathematischer Regeln eine große Menge strukturierter Zahlenpaare erzeugt. Diese Eigenschaft, die kontrollierte Erzeugung symmetrisch angeordneter, geometrisch rückverfolgbarer Wertepaare, kann in verschiedensten Disziplinen von eigenständigem Interesse sein, auch dort, wo der ggT keine unmittelbare Rolle spielt. Entscheidend ist hier nicht allein die Arithmetik, sondern vielmehr die Geometrie der Konstruktion: Die Positionen (NL, NR) sind das Ergebnis eines iterativen Rechteckprozesses, der um ein Zentrum $Z = p^2$ aufgebaut ist, unabhängig davon, ob p prim ist oder nicht.

Diese generative Struktur bringt mehrere inhärente Vorteile mit sich, die in unterschiedlichen Kontexten als funktionale oder heuristische Basis verwendet werden können:

3.8.7 Informationsmodellierung

Die KFS-Struktur erzeugt nicht nur Paare, sondern gleichzeitig auch eine Ordnung: Jedes Paar gehört einer Schale an, jede Schale hat eine feste Nummer k , jede Nummer korrespondiert mit einer Rechteckszahl R_k . Diese hierarchische, symmetrische Organisation eignet sich für die Modellierung informationsstrukturierter Räume, etwa bei der Simulation wachsender Systeme, der geometrischen Kodierung von Dateneinheiten oder der Definition numerisch wachsender Spannungsfelder. Besonders interessant ist die Tatsache, dass jede KFS-Schale eindeutig und verlustfrei rückführbar ist, ein seltener Umstand in der algorithmischen Datenkonstruktion.

3.8.8 Raum-Zeit-Analogie

Wenn man die KFS-Paare als Koordinaten auf einer x -Achse interpretiert, wobei der Abstand zum Zentrum (die Rechteckzahl) einer „Zeit“ oder „Entfaltung“ entspricht, dann ergibt sich ein Modell wachsender symmetrischer Entfernungen von einem Ursprung. Dies kann etwa als Modell diskreter Raum-Zeit-Metriken gedeutet werden,

beispielsweise in der theoretischen Physik, wo sich Raumregionen oder Felder entlang symmetrischer Expansionen entwickeln. Dass jede Expansion einer Rechteckform folgt, lässt sich dabei mit innerer Spannung oder Energie interpretieren. Die Struktur bietet somit einen mathematisch transparenten Rahmen für modellhafte Skalenentwicklung.

3.8.9 Arithmetische Lernmodelle

Die KFS bietet ein exzellentes Beispiel für die Vermittlung mathematischer Konzepte wie Symmetrie, Teilerstruktur, Rechteckzahlen oder ggT, in einem formal geschlossenen, aber visuell und algebraisch leicht zugänglichen Rahmen. In Lernumgebungen, in denen strukturelle Denkweise über heuristische Intuition gestellt wird, kann die KFS als modularer Demonstrator eingesetzt werden: etwa zur Veranschaulichung multiplikativer Eigenschaften, zur Untersuchung der Unterschiede zwischen Primzahlen und Nicht-Primzahlen oder zur Schulung in Rückführung auf algebraische Konstruktionen.

4 KQ und KFS im Vergleich

In diesem Abschnitt wird ein vergleichender Blick auf die beiden vorgestellten Strukturmodelle KQ und KFS gerichtet, um ihre jeweiligen Merkmale, Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede präzise herauszuarbeiten. Nachdem beide Strukturen zunächst unabhängig voneinander definiert und analysiert wurden, zeigt sich nun in der Gegenüberstellung deutlich, dass KQ und KFS nicht isolierte, getrennt nebeneinanderstehende Ordnungen darstellen, sondern komplementäre Perspektiven auf eine tieferliegende, emergente Symmetrie im Zahlenraum bieten. Die KQ-Struktur eröffnet eine horizontale Gruppierung natürlicher Zahlen anhand definierter irrationaler Wertepaare, während KFS vertikal-symmetrische Schalenbildungen um spezifische Quadratzentren erzeugt. Dieser Vergleich dient dazu, das Verständnis für die strukturelle Vielschichtigkeit und innere Resonanz des Zahlenraums zu vertiefen und zugleich deutlich zu machen, wie beide Modelle wechselseitig als Analyseinstrumente eingesetzt werden können, um bislang unsichtbare Ordnungsmuster zu erschließen.

4.1 Von KQ zu KFS

Die Entwicklung der KQ-Gruppenstruktur markiert einen fundamentalen Wendepunkt in der systematischen Betrachtung natürlicher Zahlen. Erst durch die Einsicht, dass jede natürliche Zahl N bereits in sich jene Strukturmerkmale trägt, die zu einer eindeutigen Gruppenzuordnung innerhalb des KQ-Modells führen, wurde es möglich, den Zahlenraum nicht länger als bloße Abfolge diskreter Werte zu betrachten, sondern als geordneten Strukturraum mit innerer Symmetrie. Diese Gruppierung erfolgt nicht durch äußere Klassifikationsregeln, sondern durch eine intrinsische Beziehung zwischen N und seinem charakteristischen Wertepaar, wodurch sich jedes N auf natürliche Weise einer Gruppe zuordnet.

Damit eröffnete sich ein analytischer Zugriff auf eine Vielzahl bislang ungenutzter Ordnungsverhältnisse: Etwa die Untersuchung struktureller Eigenschaften entlang identischer Gruppenpositionen über verschiedene KQ-Gruppen hinweg, die Analyse spezifischer T_q -Werte wie bei Primgruppen, oder die Frage, ob sich „vertikale“ Beziehungen zwischen Gruppen über Positionen hinweg systematisch nachweisen lassen. Die daraus entstehenden Überlegungen bildeten wiederum einen

wesentlichen Ausgangspunkt für die Ausarbeitung der KFS-Struktur, die als komplementäres Analyseinstrument zu KQ verstanden werden kann.

Während KQ eine vollständige strukturelle Verortung jeder einzelnen Zahl innerhalb einer symmetrisch gegliederten Gruppenlogik ermöglicht, bietet KFS eine Methode, großräumige Muster und Paarbildungen im Zahlenraum sichtbar zu machen. Die Entdeckung der vollständigen Teilerfremdheit der Schalenpaare innerhalb der Tq-Primgruppen, ein Befund, der sich in der KQ-Struktur andeutete, dort aber nicht abschließend verortet werden konnte, ließ sich erst durch die systematische Anwendung der KFS-Logik eindeutig herleiten.

Die Rechteckszahlenstruktur wurde nicht im Zuge der KQ-Analyse entdeckt, sondern ging ursächlich aus der Konstruktion der KFS selbst hervor. Sie entstand durch die Überlegung, welche Zahlenfolgen sich als geeigneter k-Motor für die Schalenbildung eignen könnten. Die Wahl fiel dabei bewusst auf die Rechteckszahlen (die stehen in KQ-Gruppen ja für die N0-Folge), zunächst rein aus strukturellen Erwägungen heraus. Erst im Anschluss, durch vertiefte Analysen der damit erzeugten Schalenpaare, traten ihre besonderen Eigenschaften zutage. Diese führten nicht nur zur Klärung zuvor unbeantworteter Fragen, sondern eröffneten auch den Zugang zu einem neuen, in sich geschlossenen Verfahren zur Erzeugung garantiert teilerfremder Zahlenpaare.

KFS erlaubt es, die Ursachen solcher arithmetischen Phänomene nicht nur zu beobachten, sondern in ihrem Ursprung zu bestimmen und als allgemeine Regel zu formulieren.

Als Strukturmodell lässt sich KFS insofern als eine Art Maßsystem des Zahlenraums begreifen: Ausgehend von einem einzelnen Zentrum, etwa einem Quadrat einer Primzahl, lassen sich unmittelbar Aussagen über die Anzahl möglicher Schalenpaare, ihre Abstände, ihre arithmetische Beschaffenheit und daraus ableitbare Eigenschaften treffen. Im Gegensatz zur KQ-Struktur, die die innere Ordnung einer Gruppe bestimmt, beschreibt KFS Ordnungsrelationen zwischen Bereichen des Zahlenraums, die über die Gruppe hinausreichen. Dabei fungiert das Quadratzentrum ebenso als Gruppierungsanker wie die Wahl des k-Motors, wodurch unterschiedliche geometrische Perspektiven auf den Zahlenraum erzeugt werden können.

In der Kombination beider Modelle zeigt sich schließlich ein duales Analyseprinzip: KQ erlaubt es, jedes N durch einen einzigen Wert T_q strukturell eindeutig zu verorten, während KFS auf Grundlage eines Quadratzenstrums großflächige Resonanzen, Teilverhältnisse und symmetrische Entfaltungen analysierbar macht. Die strukturelle Tiefe, die sich aus dem Zusammenspiel dieser beiden Ordnungsmodelle ergibt, erlaubt eine neuartige und hochdifferenzierte Sicht auf den Raum der natürlichen Zahlen.

4.2 Weitere Teilerfremdheiten und andere Kuriositäten

Durch die Kombination des KFS-Systems mit verschiedenen Zentrumstypen, insbesondere Prim-, ungeraden und geraden Quadratzahlen, sowie der freien Wahl des Abstandsmotors, dem sogenannten k -Motor, lassen sich weitere potenziell teilerfremde Zahlenpaare identifizieren. Dabei kommen andere Mechanismen zur Anwendung als im zuvor beschriebenen Rechteckszahlen-Modell. Diese methodischen Varianten sind in ihrer Tragweite derzeit noch nicht abschließend analysiert, insbesondere im Hinblick auf eine garantierte Teilerfremdheit der resultierenden Paare. Dennoch sollen im Folgenden einige dieser Konstellationen exemplarisch vorgestellt werden, um die prinzipielle Erweiterbarkeit des KFS-Ansatzes auf alternative Erkenntnisse im Zahlenraum aufzuzeigen.

Wählt man beispielsweise ein Primquadrat als Zentrum und verwendet als k -Motor die Potenzen von 2, so ergeben sich unter Anwendung der KFS-Struktur ebenfalls Zahlenpaare, bei denen empirisch eine Teilerfremdheit beobachtet werden kann (siehe Abbildung 8):

Basiszahl_n	Zentrum	Abstand_k	NL	NR	Gemeinsame_Teiler
15	225	1	224	226	1,2
15	225	2	223	227	1
15	225	4	221	229	1
15	225	8	217	233	1
15	225	16	209	241	1
15	225	32	193	257	1
15	225	64	161	289	1
15	225	128	97	353	1
21	441	1	440	442	1,2
21	441	2	439	443	1
21	441	4	437	445	1
21	441	8	433	449	1
21	441	16	425	457	1
21	441	32	409	473	1
21	441	64	377	505	1
21	441	128	313	569	1
21	441	256	185	697	1
25	625	1	624	626	1,2
25	625	2	623	627	1
25	625	4	621	629	1
25	625	8	617	633	1
25	625	16	609	641	1
25	625	32	593	657	1
25	625	64	561	689	1
25	625	128	497	753	1

Abbildung 8: Teilerfremdheit 2.0

Hier ist immer das erste Zahlenpaar eines Zentrums mit $\text{ggT}=2$ und dann alle anderen mit $\text{ggT}=1$ versehen. Auch hierfür ließe sich ein ganz simple Algorithmus ohne viel Rechenaufwand schreiben, in dem man einfach den Abstands-Startwert auf 2 setzt für den k-Motor.

Für das Zentrum Prim und Potenzen von 2 für den k-Motor ist das auch zu finden (siehe Abbildung 9):

Basiszahl_	Zentrum_	Abstand_	NL	NR	Gemeinsame_Teil_
11	121	1	120	122	1,2
11	121	2	119	123	1
11	121	4	117	125	1
11	121	8	113	129	1
11	121	16	105	137	1
11	121	32	89	153	1
11	121	64	57	185	1
13	169	1	168	170	1,2
13	169	2	167	171	1
13	169	4	165	173	1
13	169	8	161	177	1
13	169	16	153	185	1
13	169	32	137	201	1
13	169	64	105	233	1
13	169	128	41	297	1
17	289	1	288	290	1,2
17	289	2	287	291	1
17	289	4	285	293	1
17	289	8	281	297	1
17	289	16	273	305	1
17	289	32	257	321	1
17	289	64	225	353	1
17	289	128	161	417	1
17	289	256	33	545	1
19	361	1	360	362	1,2
19	361	2	359	363	1
19	361	4	357	365	1
19	361	8	353	369	1
19	361	16	345	377	1
19	361	32	329	393	1
19	361	64	297	425	1
19	361	128	233	489	1
19	361	256	105	617	1

Abbildung 9

In beiden Fällen gibt es nur die Teiler 1 und 1,2 in den Listen mit mehreren tausend Paarbildungen durch unterschiedliche Quadraträume (siehe Abbildung 10):

☒ (Alles auswählen)

☒ 1
 ☒ 1,2

Abbildung 10: Teilerfremdheit 3.0

Man kann z.B. auch KFS Erkundungen mit KQ-Gruppennummer oder GP kombinieren, z.B. um Primzwillinge mit Differenz 4 zu isolieren bei ungeradem nicht_prim Zentrum und Prim-K-Motor und zu vergleichen (siehe Abbildung 11):

A	D	E	F	G	H	I	L	O	P	Q	R	S	T
Basiszahl_n	Zentrum	Abstand	NL	NR	NL_prim	NR_prim	meinsame	G_NL	GP_NL	G_NR	GP_NR	O + Q	P + R
9	81	2	79	83	True	True	1	9	7	9	11	18	18
15	225	2	223	227	True	True	1	15	13	15	17	30	30
21	441	2	439	443	True	True	1	21	19	21	23	42	42
33	1089	2	1087	1091	True	True	1	33	31	33	35	66	66
117	13689	2	13687	13691	True	True	1	117	115	117	119	234	234
237	56169	2	56167	56171	True	True	1	237	235	237	239	474	474
273	74529	2	74527	74531	True	True	1	273	271	273	275	546	546
303	91809	2	91807	91811	True	True	1	303	301	303	305	606	606
309	95481	2	95479	95483	True	True	1	309	307	309	311	618	618
387	149769	2	149767	149771	True	True	1	387	385	387	389	774	774
429	184041	2	184039	184043	True	True	1	429	427	429	431	858	858
441	194481	2	194479	194483	True	True	1	441	439	441	443	882	882
447	199809	2	199807	199811	True	True	1	447	445	447	449	894	894
513	263169	2	263167	263171	True	True	1	513	511	513	515	1026	1026
561	314721	2	314719	314723	True	True	1	561	559	561	563	1122	1122
573	328329	2	328327	328331	True	True	1	573	571	573	575	1146	1146
609	370881	2	370879	370883	True	True	1	609	607	609	611	1218	1218
807	651249	2	651247	651251	True	True	1	807	805	807	809	1614	1614
897	804609	2	804607	804611	True	True	1	897	895	897	899	1794	1794

Abbildung 11: Primzwillinge Diff 4

Auffällig ist in diesem Zusammenhang (die Basiszahl_n ist hier übrigens immer durch 3 teilbar), dass sich die Gruppennummer G und die Gruppenposition GP bei bestimmten Additionen identisch verhalten. Dieses Verhalten lässt sich durchaus erklären und verweist zugleich auf ein tieferliegendes Ordnungsprinzip innerhalb der KQ- und KFS-Struktur. Die Übereinstimmungen deuten darauf hin, dass weder G noch GP bloß formale Zählmarken sind, sondern strukturtragende Größen mit systematischer Bedeutung. Ihre scheinbare Übereinstimmung in bestimmten Rechenoperationen ist kein Zufall, sondern Ausdruck der inneren Kohärenz des zugrunde liegenden Modells.

Dieser Eindruck wird noch verstärkt, wenn man sich diese Synchronität der Zahlen G und GP bei Prim-Zentrum und Rechteckszahlen k-Motor betrachtet (siehe):

Basiszahl_n	Zentrum	Abstand_R	NL	NR	Anzahl_gemeinsame_Teiler	G_links	GP_links	G_rechts	GP_rechts	G L + G R	GP L + GP f
23	529	2	527	531	1	23	21	23	25	46	46
23	529	6	523	535	1	23	17	23	29	46	46
23	529	12	517	541	1	23	11	23	35	46	46
23	529	20	509	549	1	23	3	23	43	46	46
23	529	30	499	559	1	22	37	24	7	46	44
23	529	42	487	571	1	22	25	24	19	46	44
23	529	56	473	585	1	22	11	24	33	46	44
23	529	72	457	601	1	21	37	25	1	46	38
23	529	90	439	619	1	21	19	25	19	46	38
23	529	110	419	639	1	20	39	25	39	45	78
23	529	132	397	661	1	20	17	26	11	46	28
23	529	156	373	685	1	19	31	26	35	45	66
23	529	182	347	711	1	19	5	27	9	46	14
23	529	210	319	739	1	18	13	27	37	45	50
23	529	240	289	769	1	17	17	28	13	45	30
23	529	272	257	801	1	16	17	28	45	44	62
23	529	306	223	835	1	15	13	29	23	44	36
23	529	342	187	871	1	14	5	30	1	44	6
23	529	380	149	909	1	12	17	30	39	42	56
23	529	420	109	949	1	10	19	31	19	41	38
23	529	462	67	991	1	8	11	31	61	39	72
23	529	506	23	1035	2	5	3	32	43	37	46

Abbildung 12: G und GP Synchronität

Es zeigt sich deutlich in Abbildung 12, dass die Abstände R , die durch den gewählten k -Motor vorgegeben werden, zu Beginn stets sehr nah am Zentrum liegen. In dieser Phase ergeben sich auffallende Übereinstimmungen zwischen den Summen $G(NL) + G(NR)$ und $GP(NL) + GP(NR)$, was sich zwar formal erklären lässt, aber dennoch auf eine bemerkenswerte strukturelle Übereinkunft hinweist. Dass sich überhaupt derart viele Summengleichheiten und Reihenkonvergenzen zeigen, ist keineswegs selbstverständlich. Allein die Tatsache, dass in der KQ-Gruppe G23 der definierte Wertebereich bei $N = 506$ beginnt und bei $N = 551$ endet, der identische Summenwert von $GL + GR$ aber noch bis $NL = 439$ erhalten bleibt, also deutlich außerhalb der zugehörigen KQ-Gruppe, ist ein weiteres starkes Indiz für die strukturelle Konsistenz zwischen KQ und KFS.

Auch wenn sich solche Phänomene jeweils im Detail begründen lassen, ist es gerade die wiederholte, stabile Koordinierung beider Systeme über unterschiedliche Betrachtungsperspektiven hinweg, die auf eine tiefere strukturelle Kompatibilität schließen lässt. Die KQ-Gruppen organisieren lokale Ordnung auf Basis individueller Zahlenwerte, während KFS globale Paarungen und deren arithmetische Eigenschaften im Umfeld definierter Quadratzentren sichtbar macht. Dass sich in diesen unterschiedlichen Ordnungsmodellen identische oder eng verwandte Muster zeigen, bestätigt nicht nur ihre innere Stimmigkeit, sondern legt zugleich nahe, dass beide Strukturen gemeinsam ein Analysegerüst bilden, das sich zur weiterreichenden Klassifikation des natürlichen Zahlenraums eignet.

Weitere Kuriosität, wählt man Prim-Zentrum und Quadrat- k -Motor, bekommt man immer $ggT=1$ und $ggT=2$ im Wechsel, komplett über alle beobachteten Werte (siehe Abbildung 13):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Basiszahl_n	Zentrum	Abstand_k	N_links	N_rechts	N_links_ist_pi	N_rechts_ist	N_links_ist_N	N_rechts_ist	Gemeinsame
2	4	1	3	5	True	True	False	False	1
3	9	1	8	10	False	False	False	False	1,2
3	9	4	5	13	True	True	False	False	1
5	25	1	24	26	False	False	False	False	1,2
5	25	4	21	29	False	True	False	False	1
5	25	9	16	34	False	False	False	False	1,2
5	25	16	9	41	False	True	False	False	1
7	49	1	48	50	False	False	False	False	1,2
7	49	4	45	53	False	True	False	False	1
7	49	9	40	58	False	False	False	False	1,2
7	49	16	33	65	False	False	False	False	1
7	49	25	24	74	False	False	False	False	1,2
7	49	36	13	85	True	False	False	False	1
11	121	1	120	122	False	False	False	False	1,2
11	121	4	117	125	False	False	False	False	1
11	121	9	112	130	False	False	False	False	1,2
11	121	16	105	137	False	True	False	False	1
11	121	25	96	146	False	False	False	False	1,2
11	121	36	85	157	False	True	False	False	1
11	121	49	72	170	False	False	True	False	1,2
11	121	64	57	185	False	False	False	False	1
11	121	81	40	202	False	False	False	False	1,2
11	121	100	21	221	False	False	False	False	1
13	169	1	168	170	False	False	False	False	1,2
13	169	4	165	173	False	True	False	False	1
13	169	9	160	178	False	False	False	False	1,2
13	169	16	153	185	False	False	False	False	1
13	169	25	144	194	False	False	False	False	1,2
13	169	36	133	205	False	False	False	False	1
13	169	49	120	218	False	False	False	False	1,2
13	169	64	105	233	False	True	False	False	1
13	169	81	88	250	False	False	False	False	1,2
13	169	100	69	269	False	True	False	False	1
13	169	121	48	290	False	False	False	False	1,2
13	169	144	25	313	False	True	False	False	1
17	289	1	288	290	False	False	False	False	1,2
17	289	4	285	293	False	True	False	False	1
17	289	9	280	298	False	False	False	False	1,2
17	289	16	273	305	False	False	False	False	1
17	289	25	264	314	False	False	False	False	1,2
17	289	36	253	325	False	False	False	False	1
17	289	49	240	338	False	True	False	False	1,2

Abbildung 13: ggT=1 und ggT=2 Wechsel

Bei Primzentrum und gerade k-Motorfolge bekommt man eine aufsteigende Primreihe in $ggT > 1$ die genau immer in p-Schritten erscheint über eine Basis (siehe Abbildung 14):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Basiszahl_n	Zentrum	Abstand_k	N_links	N_rechts	N_links_ist_pi	N_rechts_ist	N_links_ist_N	N_rechts_ist	Gemeinsame
2	4	2	2	6	True	False	True	True	1,2
3	9	2	7	11	True	True	False	False	1
3	9	4	5	13	True	True	False	False	1
3	9	6	3	15	True	False	False	False	1,3
3	9	8	1	17	False	True	False	False	1
5	25	2	23	27	True	False	False	False	1
5	25	4	21	29	False	True	False	False	1
5	25	6	19	31	True	True	False	False	1
5	25	8	17	33	True	False	False	False	1
5	25	10	15	35	False	False	False	False	1,5
5	25	12	13	37	True	True	False	False	1
5	25	14	11	39	True	False	False	False	1
5	25	16	9	41	False	True	False	False	1
5	25	18	7	43	True	True	False	False	1
5	25	20	5	45	True	False	False	False	1,5
5	25	22	3	47	True	True	False	False	1
5	25	24	1	49	False	False	False	False	1
7	49	2	47	51	True	False	False	False	1
7	49	4	45	53	False	True	False	False	1
7	49	6	43	55	True	False	False	False	1
7	49	8	41	57	True	False	False	False	1
7	49	10	39	59	True	True	False	False	1
7	49	12	37	61	True	True	False	False	1
7	49	14	35	63	False	False	False	False	1,7
7	49	16	33	65	False	False	False	False	1
7	49	18	31	67	True	True	False	False	1
7	49	20	29	69	True	False	False	False	1
7	49	22	27	71	False	True	False	False	1
7	49	24	25	73	True	True	False	False	1
7	49	26	23	75	True	False	False	False	1
7	49	28	21	77	False	False	False	False	1,7
7	49	30	19	79	True	True	False	False	1
7	49	32	17	81	True	False	False	False	1
7	49	34	15	83	False	True	False	False	1
7	49	36	13	85	True	False	False	False	1
7	49	38	11	87	True	False	False	False	1
7	49	40	9	89	False	True	False	False	1
7	49	42	7	91	True	False	False	False	1,7
7	49	44	5	93	True	False	False	False	1
7	49	46	3	95	True	False	False	False	1
7	49	48	1	97	False	True	False	False	1

Abbildung 14: Aufsteigende Primreihe in J

Alle Kuriositäten, die sich aus der Anwendung der KFS-Struktur ergeben, lassen sich in diesem Rahmen selbstverständlich nicht vollständig aufführen (es gibt z.B. auch eine Kombination die nur und ausschließlich ggT formt die 1,2 sind und viele andere dieser Möglichkeiten). Es geht auch nicht primär darum, jede dieser Erscheinungen im Detail zu erklären. Entscheidender ist die Erkenntnis, dass sich mit der KFS-Schalenstruktur auf einfache Weise ganz unterschiedliche Zahlenpaare mit gezielten Eigenschaften erzeugen lassen. Die Wahl eines bestimmten k-Motors in Kombination mit einem definierten Zentrum erzeugt keine zufälligen Resultate, sondern strukturell determinierte Zahlensysteme mit überprüfbaren Eigenschaften. Gerade darin liegt das eigentliche Potenzial dieses Ansatzes.

Bereits in der hier vorgestellten Grundstruktur ist ein Algorithmus zur Erzeugung garantiert teilerfremder Paare sichtbar geworden, der nicht mehr auf klassischen Entscheidungslogiken oder ggT-Prüfungen basiert, sondern auf einer rein strukturellen Ansteuerung beruht. Aus Beobachtungen werden Regelmäßigkeiten, aus Regelmäßigkeiten werden Konstruktionen, und aus Konstruktionen lassen sich in direkter Weise algorithmisch verwertbare Muster ableiten. Damit verändert sich auch der Charakter der Algorithmik selbst: Weg von Prüfung, Auswahl und Verwerfung, hin zu einer mathematisch exakten Raumadressierung, mit der gewünschte Eigenschaften von Zahlen gezielt aufgerufen werden können.

Dieses strukturelle Paradigma eröffnet nicht nur praktische Perspektiven, etwa für die Generierung von Testdaten, sondern wirft auch grundlegende theoretische Fragen auf. Welche Zahlenpaare entstehen bei welcher Kombination aus Zentrumstyp und Abstandsmotor? Welche Muster zeigen sich bei systematischer Variation der k-Folge? Welche Primfaktorzerlegungen, Teilverhältnisse oder Dichten entstehen, wenn man den Raum gezielt kartiert? Diese Fragen sind bislang nicht beantwortet, viele nicht einmal gestellt. Was sich allein aus der strukturellen Sichtweise heraus an neuen Erkenntnissen ergibt, ist bereits erstaunlich. Was darüber hinaus möglicherweise für die Zahlentheorie insgesamt darin steckt, lässt sich derzeit kaum abschätzen.

Die KFS-Struktur verdient daher eine systematische wissenschaftliche Eroberung. Eine detaillierte Klassifikation ihrer Kombinationsmöglichkeiten, etwa im Rahmen begleitender Seminar- oder Masterarbeiten, könnte nicht nur die Tiefenstruktur des

Zahlenraums weiter sichtbar machen, sondern zugleich ein neues Kapitel algorithmisch strukturierter Zahlenerzeugung aufschlagen. Was sich in ersten Beobachtungen als Kuriosität zeigt, könnte sich im größeren Zusammenhang als Baustein einer umfassenden arithmetischen Geometrie erweisen.

4.3 Vergleichende Messreihen: ggT-Prüfung aktiv vs. inaktiv

Zur Klärung der obigen Frage wurden gezielte Rechenexperimente durchgeführt, die zwei unterschiedliche Szenarien vergleichen: Zum einen eine breite Auswahl vieler kleiner Primzentren mit jeweils geringer Schalentiefe, zum anderen ein einziger, extrem großer Primwert ($p = 30.000.071$), dessen KFS-Schale fast 30 Millionen Paare erzeugt. In beiden Fällen wurde die Anzahl der erzeugten Paare sowie die Dauer der Berechnung mit und ohne aktivierte ggT-Prüfung gemessen. Die konkreten Testparameter und Ergebnisse lauten (der Pythoncode ist hier zu finden: 6.1 Python Script für garantiert teilerfremde Zahlenpaare):

Viele Primräume mit eher wenigen Schalen:

raum_start = 1000

raum_end = 25000

Anzahl Paare: 32.324.402

ggT deaktiviert:

Dauer: 8,0 Sekunden

ggT aktiviert:

Dauer: 25,3 Sekunden

Anzahl nicht teilerfremder Paare: 0

Ein Primraum mit ca. 30 Millionen Schalen:

$p = 30.000.071$

Anzahl Paare: 30.000.069

ggT deaktiviert:

Dauer: 7,9 Sekunden

ggT aktiviert:

Dauer: 59,1 Sekunden

Anzahl nicht teilerfremder Paare: 0

Die Resultate sind eindeutig: In keinem der Fälle trat auch nur ein einziges Paar mit $ggT > 1$ auf, die vollständige Teilerfremdheit ist empirisch in allen Szenarien bestätigt und ebenfalls eine Folge des strukturellen Aufbaus selbst. Zugleich zeigen die Laufzeiten einen drastischen Unterschied: Bei aktivierter ggT-Prüfung steigt der Rechenaufwand um mehr als das Siebenfache an, insbesondere bei monolithischer Belastung durch eine einzelne große Primgruppe.

Die eigentliche Pointe liegt jedoch nicht in der Zeitersparnis selbst, sondern in der Kombination beider Effekte: Die ggT-Prüfung kostet massiv Zeit, ohne dass sie in irgendeinem Fall ein strukturelles Fehlverhalten entdecken würde. Genau dieser Umstand macht die Fragestellung brisant, denn hier offenbart sich ein tieferes Missverhältnis zwischen Kontrollroutine und strukturellem Wissen.

4.4 Beobachtungen: Zeitverhalten und strukturelle Erkenntnisse

Die Messdaten lassen sich sowohl quantitativ als auch qualitativ auswerten. Zunächst zur quantitativen Dimension: Die Rechenzeit bei deaktivierter ggT-Prüfung liegt in beiden Testreihen erstaunlich dicht beieinander, jeweils bei etwa acht Sekunden, obwohl im ersten Fall mehr Paare erzeugt wurden. Dies legt nahe, dass die reine Paargenerierung aus der Rechteckstruktur der KFS-Schale selbst bereits sehr effizient ist und kaum von der Verteilung der Primzentren abhängt. Sobald jedoch die ggT-Prüfung aktiviert wird, ändert sich das Bild dramatisch: Die Laufzeit steigt für das Szenario mit vielen kleinen Gruppen auf das Dreifache, im Fall der Einzelgruppe mit hoher Schalentiefe auf fast das Achtfache. Dieser Unterschied ist nicht linear zur Anzahl der Paare, was bedeutet, dass die ggT-Prüfung selbst ein nichttrivialer Flaschenhals ist, insbesondere wenn sie millionenfach in enger Folge innerhalb desselben Zahlenraums aufgerufen wird.

Qualitativ lässt sich daraus eine entscheidende Einsicht gewinnen: Die strukturelle Information, die aus der KFS-Definition folgt, nämlich die sichere Teilerfremdheit durch symmetrische Rechteckkonstellation um p^2 , ist nicht nur theoretisch belastbar, sondern operativ vertrauenswürdig. Die empirische Kontrolle, einst als Sicherung gedacht, wird hier zur unnötigen Verzögerung. Mehr noch: Sie steht im Widerspruch zum Charakter der Daten selbst. Denn diese sind nicht zufällig, sondern strukturell erzeugt, die ggT-

Prüfung hat hier nicht die Aufgabe, kontingente Fehler zu entdecken, sondern sie agiert im Modus eines Misstrauens, das angesichts der Ordnung des Raums fehl am Platz ist.

Was sich hier abzeichnet, ist daher keine banale Performancefrage, sondern eine erkenntnistheoretische Schwelle: Die Daten verlangen nicht nach Kontrolle, sondern nach Einsicht. Die Struktur ersetzt den Test.

5 Lizenzhinweis zur Nutzung dieses Dokuments:

Das vorliegende Werk einschließlich aller darin enthaltenen Begriffe, Modelle und Darstellungen, insbesondere die Konzepte der Kanonisch-Quasiquadratischen Gruppenstruktur (KQ) sowie der K-Fokalen Schalensymmetrie (KFS), ist urheberrechtlich geschützt.

Die Nutzung ist unter folgenden Bedingungen gestattet:

- Die wissenschaftliche Nutzung (einschließlich Zitierung, Weiterentwicklung in akademischen Kontexten, Verwendung zu Lehr- und Forschungszwecken) ist uneingeschränkt gestattet, sofern auf den Ursprung des Werks in angemessener Weise verwiesen wird.
- Die private Nutzung, d. h. die nicht-kommerzielle Verwendung im persönlichen, nicht-institutionellen Rahmen (z. B. individuelle Anwendungen, private Weiterverarbeitung, nicht öffentliche Weitergabe), ist ebenfalls gestattet, unter Beibehaltung der vollständigen Herkunftsangabe.
- Kommerzielle Nutzung – darunter fallen unter anderem jede Art von kommerzieller Softwareintegration, kommerzielle Beratung, industrielle Anwendung, Lizenzweitergabe oder technische Implementierung in Produkten oder Dienstleistungen – ist nur nach ausdrücklicher schriftlicher Zustimmung des Urhebers und dem Abschluss eines entsprechenden Lizenzvertrags zulässig.

Jegliche Form der kommerziellen Verwertung ohne Lizenz stellt eine Verletzung des Urheberrechts dar und kann/wird rechtlich verfolgt werden.

Dieses Werk steht unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-NC 4.0 International.

Wissenschaftliche und private Nutzung sind unter Namensnennung gestattet.

Kommerzielle Nutzung nur mit vorheriger schriftlicher Zustimmung des Autors.

Lizenztext: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Zitierhinweis:

A. Meißner: KQ-KFS-Strukturen. Zur geometrischen Emergenz arithmetischer Realität. Eine Analyse Kanonisch-Quasiquadratischer Gruppen (KQ) und k-fokaler Schalensymmetrien (KFS) als Strukturformen informationstragender Räume, DOI: 10.5281/zenodo.15683652, 2025.

(online verfügbar unter: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15683652>)

6 Anhang

6.1 Python Script für garantiert teilerfremde Zahlenpaare

```
import csv
import math
import time
from datetime import datetime, timezone

# ===== Steuerung: ggT-Prüfung aktivieren/deaktivieren =====
ggT_benutzen = True # auf False setzen, um ggT komplett zu ignorieren

# ===== Parameter festlegen =====
raum_start = 30000071
raum_end = 30000071

# ===== Hilfsfunktionen =====
def ist_prim(n):
    if n < 2:
        return False
    if n == 2:
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False
    for i in range(3, int(math.sqrt(n)) + 1, 2):
        if n % i == 0:
            return False
    return True

def ggT(a, b):
    while b:
        a, b = b, a % b
    return a

# ===== Berechnungsstartzeit erfassen =====
start_time = time.time()
start_timestamp = datetime.now().strftime('%H:%M:%S:%f')[:-3]

# ===== Daten berechnen =====
datensaetze = []
```

```

anzahl_nicht_teilerfremd = 0

for p in range(raum_start, raum_end + 1):
    if not ist_prim(p):
        continue

    zentrum = p * p
    max_k = p - 1 # wie im KFS-Modell definiert
    for k in range(2, max_k + 1):
        Rk = k * (k - 1)
        NL = zentrum - Rk
        NR = zentrum + Rk

        if ggt_benutzen:
            if ggT(NL, NR) == 1:
                datensaetze.append((p, NL, NR))
            else:
                anzahl_nicht_teilerfremd += 1
        else:
            datensaetze.append((p, NL, NR))

# ===== Berechnungszeit stoppen =====
end_time = time.time()
berechnungszeit = end_time - start_time

# ===== CSV-Datei schreiben =====
with open('teilerfremde_paare.csv', mode='w', newline='') as datei:
    writer = csv.writer(datei, delimiter=';')
    writer.writerow(['Prim', 'NL', 'NR'])
    writer.writerows(datensaetze)

# ===== Ausgabe der Zeitdauer =====
dauer = datetime.fromtimestamp(berechnungszeit,
tz=timezone.utc).strftime('%H:%M:%S:%f')[:-3]
print(f"Startzeit Berechnung: {start_timestamp}")
print(f"Dauer reine Berechnung: {dauer}")
print(f"Anzahl Paare (gespeichert): {len(datensaetze)}")
if ggt_benutzen:
    print(f"Anzahl NICHT teilerfremder Paare (ggT > 1): {anzahl_nicht_teilerfremd}")
else:
    print("ggT-Prüfung wurde deaktiviert.")

```

Der Pythoncode erstellt Teilerfremde-Zahlenpaare im Prim-Raum: 30000071 hier bekommt man ca. 30 Millionen garantiert Teilerfremde-Zahlenpaare, diese sehen z.B. so aus in der CSV-Ausgabedatei (siehe Abbildung 15):

Prim;NL;NR
30000071;900004260005039;900004260005043
30000071;900004260005035;900004260005047
30000071;900004260005029;900004260005053
30000071;900004260005021;900004260005061
30000071;900004260005011;900004260005071
30000071;900004260004999;900004260005083
30000071;900004260004985;900004260005097
30000071;900004260004969;900004260005113
30000071;900004260004951;900004260005131
30000071;900004260004931;900004260005151
30000071;900004260004909;900004260005173
30000071;900004260004885;900004260005197
30000071;900004260004859;900004260005223
30000071;900004260004831;900004260005251
30000071;900004260004801;900004260005281
30000071;900004260004769;900004260005313
30000071;900004260004735;900004260005347
30000071;900004260004699;900004260005383
30000071;900004260004661;900004260005421
30000071;900004260004621;900004260005461
30000071;900004260004579;900004260005503
30000071;900004260004535;900004260005547
30000071;900004260004489;900004260005593
30000071;900004260004441;900004260005641
30000071;900004260004391;900004260005691
30000071;900004260004339;900004260005743
30000071;900004260004285;900004260005787

Abbildung 15

Die Datei selbst ist ca. 1,2 Gigabyte groß, dauert ca. 7-8s bei der Erstellung ohne ggT-Prüfung, mit ggT ca. 60s. Da die Teilerfremdheit quasi per Struktur garantiert ist, dient die ggT-Prüfung hier nur als Zeitvergleichsgröße, wie viel langsamer ggT solche Erzeugungen macht.

6.2 Der KFS-Motor

Eine Python Umsetzung für die KFS Systematik:

```
import csv
import math
from sympy import isprime, factorint
from math import gcd
```

```

from itertools import count, islice

# === PARAMETER ===

zentrum_start = 589      # Startwert für n, mit Zentrum = n^2
zentrum_end = 589        # Endwert für n
mirror_radius = 1000     # Anzahl Schalenpaare

# Steuerung des Zentrumstyps:
# mögliche Werte: "prim", "gerade", "ungerade_nichtprim"
modus_zentrum = "ungerade_nichtprim"

# Steuerung der Schrittfolge für k:
# mögliche Werte:
#   "linear"           → 1, 2, 3, 4, ...
#   "prim"             → 2, 3, 5, 7, ...
#   "gerade"           → 2, 4, 6, 8, ...
#   "ungerade_nichtprim" → 1, 9, 15, ...
#   "quadrade"         → 1, 4, 9, 16, ...
#   "fibonacci"        → 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
#   "potenzen_von_2"   → 1, 2, 4, 8, 16, ...
#   "dreieckszahlen"   → 1, 3, 6, 10, 15, ...
#   "rechteckszahlen"  → 2, 6, 12, 20, 30, ...
modus_k = "rechteckszahlen"

# === HILFSFUNKTIONEN ===

def berechne_tp_tq(N):
    wurzel = math.sqrt(4 * N + 1)
    Tp = (wurzel - 1) / 2
    Tq = Tp + 1
    return int(Tp), int(Tq)

def gruppenzugehörigkeit(N):
    if N <= 0:
        return None, None, False
    Tp_vk, Tq_vk = berechne_tp_tq(N)
    N0 = Tq_vk ** 2 - Tq_vk
    if N == N0:
        return Tq_vk, 0, True
    elif N < N0:
        return Tq_vk, None, False

```

```

elif N <= N0 + Tp_vk + Tq_vk:
    return Tq_vk, N - N0, False
else:
    return Tq_vk, None, False

def gemeinsame_teiler(a, b):
    result = set()
    g = gcd(a, b)
    for i in range(1, int(math.isqrt(g)) + 1):
        if g % i == 0:
            result.add(i)
            result.add(g // i)
    return sorted(result)

def zentrum_erlaubt(n, modus):
    if modus == "prim":
        return isprime(n)
    elif modus == "gerade":
        return n % 2 == 0
    elif modus == "ungerade_nichtprim":
        return n % 2 == 1 and not isprime(n)
    else:
        raise ValueError(f"Unbekannter Zentrum-Modus '{modus}'.")

def generiere_k_folge(modus, grenze):
    if modus == "linear":
        return list(range(1, grenze + 1))
    elif modus == "prim":
        return list(islice((x for x in count(2) if isprime(x)), grenze))
    elif modus == "gerade":
        return [2 * i for i in range(1, grenze + 1)]
    elif modus == "ungerade_nichtprim":
        def unp():
            for x in count(1, 2):
                if not isprime(x):
                    yield x
        return list(islice(unp(), grenze))
    elif modus == "quadrade":
        return [i * i for i in range(1, grenze + 1)]
    elif modus == "fibonacci":
        seq = [1, 1]
        while len(seq) < grenze:

```

```

        seq.append(seq[-1] + seq[-2])
    return seq
elif modus == "potenzen_von_2":
    return [2 ** i for i in range(grenze)]
elif modus == "dreieckszahlen":
    return [i * (i + 1) // 2 for i in range(1, grenze + 1)]
elif modus == "rechteckszahlen":
    return [i * (i + 1) for i in range(1, grenze + 1)]
else:
    raise ValueError(f"Unbekannter k-Folgen-Modus '{modus}'.")

def pfz_struktur(n):
    fakten = factorint(n)
    pfz_str = '*'.join(f"{p}^{e}" for p, e in fakten.items())
    summe_exp = sum(fakten.values())
    anzahl_teiler = 1
    for exp in fakten.values():
        anzahl_teiler *= (exp + 1)
    return pfz_str, summe_exp, anzahl_teiler

# === DATEINAMEN ===
output_filename = (
    f"zentrum_{modus_zentrum}_von_{zentrum_start}_bis_{zentrum_end}_"
    f"breite_{mirror_radius}_kfolge_{modus_k}.csv"
)

# === ANALYSE ===
k_folge = generiere_k_folge(modus_k, mirror_radius)
daten = []

for n in range(zentrum_start, zentrum_end + 1):
    if not zentrum_erlaubt(n, modus_zentrum):
        continue
    zentrum = n ** 2
    pfz_z, sum_exp_z, anz_teiler_z = pfz_struktur(zentrum)
    for k in k_folge:
        N_links = zentrum - k
        N_rechts = zentrum + k
        if N_links <= 0:
            continue

    gemeinsame = gemeinsame_teiler(N_links, N_rechts)

```

```

gemeinsame_str = ','.join(str(x) for x in gemeinsame)
anzahl_gemeinsame = len(gemeinsame)
ggT = gcd(N_links, N_rechts)
ist_1_oder_lund2 = gemeinsame_str in ["1", "1,2"]

G_l, GP_l, istN0_l = gruppenzugehörigkeit(N_links)
G_r, GP_r, istN0_r = gruppenzugehörigkeit(N_rechts)

pfz_l, sum_exp_l, anz_teiler_l = pfz_struktur(N_links)
pfz_r, sum_exp_r, anz_teiler_r = pfz_struktur(N_rechts)

daten.append({
    "Basiszahl_n": n,
    "Zentrum": zentrum,
    "Abstand_k": k,
    "N_links": N_links,
    "N_rechts": N_rechts,
    "N_links_ist_prim": isprime(N_links),
    "N_rechts_ist_prim": isprime(N_rechts),
    "N_links_ist_N0_Start": istN0_l,
    "N_rechts_ist_N0_Start": istN0_r,
    "Gemeinsame_Teiler": gemeinsame_str,
    "Ist_1_oder_lund2": ist_1_oder_lund2,
    "Anzahl_gemeinsame_Teiler": anzahl_gemeinsame,
    "G_links": G_l,
    "GP_links": GP_l,
    "G_rechts": G_r,
    "GP_rechts": GP_r,
    "GGT": ggT,
    "PFZ_Zentrum": pfz_z,
    "PFZ_Zentrum_Summe_Exponenten": sum_exp_z,
    "PFZ_Zentrum_Anz_Teiler": anz_teiler_z,
    "PFZ_N_links": pfz_l,
    "PFZ_N_links_Summe_Exponenten": sum_exp_l,
    "PFZ_N_links_Anz_Teiler": anz_teiler_l,
    "PFZ_N_rechts": pfz_r,
    "PFZ_N_rechts_Summe_Exponenten": sum_exp_r,
    "PFZ_N_rechts_Anz_Teiler": anz_teiler_r
})

```

```
# === SCHREIBEN ALS CSV ===
```

```
if daten:
    feldnamen = list(daten[0].keys())
    with open(output_filename, mode='w', newline='', encoding='utf-8') as
file:
        writer = csv.DictWriter(file, fieldnames=feldnamen, delimiter=';')
        writer.writeheader()
        for zeile in daten:
            writer.writerow(zeile)
```